Esercitazioni di Fisica 1

Ultima versione: 12 febbraio 2014

Urti con corpi rigidi

1 Urto di una particella contro un disco

Un disco di raggio R e massa M è appoggiato su un piano senza attrito, e si trova inizialmente in quiete. Una particella di massa m e velocità v_0 lo colpisce sul bordo, con un parametro d'urto d. L'urto è completamente anelastico e istantaneo, e la particella rimane fissata sul bordo del disco.

Esercizio 1. Calcolare il momento di inerzia dell'unico corpo rigido finale, rispetto al suo centro di massa.

Il momento di inerzia del solo disco relativo al suo centro di massa è $MR^2/2$. Il centro di massa del corpo rigido finale si troverà ad una distanza dal centro del disco data da

$$a = \frac{mR}{m+M}$$

e utilizzando il teorema di Steiner troviamo il momento di inerzia cercato:

$$\begin{aligned}
I_{cm} &= \frac{1}{2}MR^2 + Ma^2 + m\,(R-a)^2 \\
&= \frac{1}{2}MR^2 + \frac{Mm^2R^2}{(m+M)^2} + m\left(R - \frac{mR}{m+M}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}MR^2 + \frac{mM}{m+M}R^2
\end{aligned}$$

Esercizio 2. Descrivere il moto dopo l'urto.

Dopo l'urto abbiamo un unico corpo rigido: dato che non si hanno forze e momenti esterni il suo centro di massa avrà una velocità costante $\vec{v}_{cm}$, e il corpo ruoterà con velocità angolare $\vec{\omega}$.

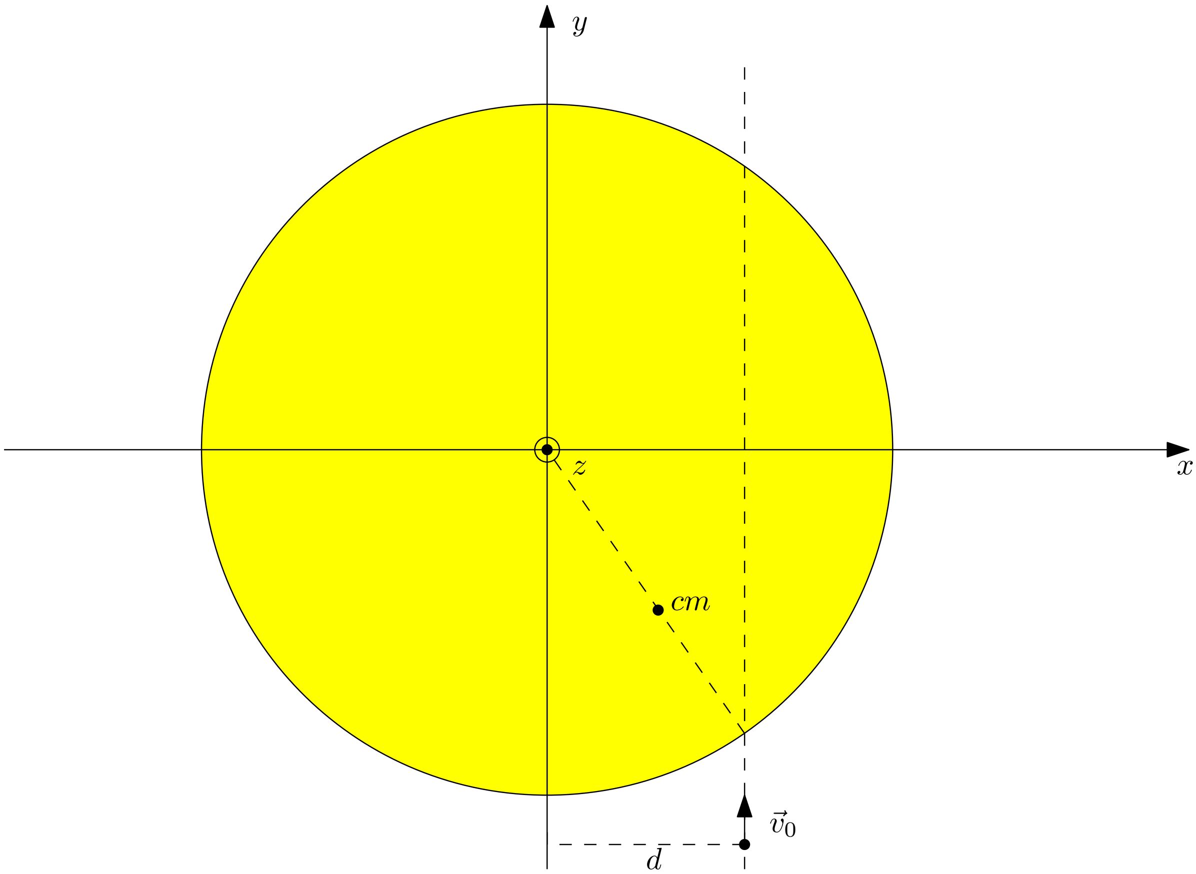

Figura 1.1: Il disco e la particella prima dell'urto.

Per la stessa ragione durante l'urto si conserva il momento angolare e la quantità di moto totale. Utilizzando il sistema di coordinate in Figura 1.1 abbiamo per la quantità di moto

$$m\vec{v}_0 = (m+M)\,\vec{v}_{cm}$$

e quindi

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m}{m+M}\begin{pmatrix}0\\ v_0\\ 0\end{pmatrix}$$

Per il momento angolare invece, prendendo come polo il centro del disco

$$\vec{r}\wedge m\vec{v}_0 = I_{cm}\vec{\omega} + \vec{r}_{cm}\wedge(m+M)\,\vec{v}_{cm}$$

dove $\vec{r}$ è il vettore posizione del punto di impatto e $\vec{r}_{cm}$ quello del centro di massa del sistema. Quindi

$$\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ d & -\sqrt{R^2-d^2} & 0\\ 0 & mv_0 & 0\end{vmatrix} = I_{cm}\vec{\omega} + \frac{m}{m+M}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ d & -\sqrt{R^2-d^2} & 0\\ 0 & mv_0 & 0\end{vmatrix}$$

L'unica componente non nulla è quella lungo z, e si ha

$$mv_0 d = I_{cm}\omega + \frac{m^2 d}{m+M}v_0$$

ossia

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{mM}{m+M}\frac{v_0 d}{I_{cm}}\\ &= \frac{\mu}{\frac{1}{2}M+\mu}\frac{v_0 d}{R^2}\end{aligned}$$

Esercizio 3. Calcolare la velocità del centro del disco immediatamente dopo l'urto.

Dato che

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{cm} - \vec{\omega}\wedge\vec{r}_{cm}$$

abbiamo

$$\begin{aligned}\vec{v}_0 &= \frac{m}{m+M}\begin{pmatrix}0\\ v_0\\ 0\end{pmatrix} - \frac{m}{m+M}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 0 & 0 & \omega\\ d & -\sqrt{R^2-d^2} & 0\end{vmatrix}\\ &= \frac{m}{m+M}\begin{pmatrix}-\omega\sqrt{R^2-d^2}\\ v_0-\omega d\\ 0\end{pmatrix}\\ &= \frac{mv_0}{m+M}\begin{pmatrix}-\frac{\mu}{\frac{1}{2}M+\mu}\frac{d\sqrt{R^2-d^2}}{R^2}\\ 1-\frac{\mu}{\mu+\frac{1}{2}M}\frac{d^2}{R^2}\\ 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Quindi la componente x della velocità è sempre negativa (o nulla), e quella y sempre positiva.

Esercizio 4. Trovare un eventuale punto fisso del corpo rigido dopo l'urto.

Detto $\vec{r}^\star$ il vettore posizione dell'eventuale punto fisso, dovremo avere

$$\vec{v}^\star = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \wedge (\vec{r}^\star - \vec{r}_{cm}) = 0$$

Se $\vec{\omega} = 0$ questa equazione si riduce a $\vec{v}_{cm} = 0$. Questo è un caso banale: in assenza di rotazione tutti i punti del corpo sono fissi (se il corpo è fermo) oppure nessuno lo è.

Se invece $\vec{\omega} \neq 0$ calcoliamo il prodotto vettore con $\vec{\omega}$ ottenendo

$$\vec{v}_{cm} \wedge \vec{\omega} + [\vec{\omega} \wedge (\vec{r}^\star - \vec{r}_{cm})] \wedge \vec{\omega} = 0$$

ma dato che $\vec{r}^\star - \vec{r}_{cm}$ è perpendicolare a $\vec{\omega}$ possiamo anche scrivere

$$\vec{v}_{cm} \wedge \vec{\omega} + \omega^2 (\vec{r}^\star - \vec{r}_{cm}) = 0$$

e quindi

$$\begin{aligned} \vec{r}^\star &= \vec{r}_{cm} - \frac{1}{\omega^2}\vec{v}_{cm} \wedge \vec{\omega} \\ &= \vec{r}_{cm} - \frac{1}{\omega}\vec{v}_{cm} \wedge \hat{z} \end{aligned}$$

Esercizio 5. Trovare quanta energia è persa nell'urto.

Possiamo calcolare direttamente la variazione di energia dai dati precedenti. Abbiamo

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{2}(M+m)\,v_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mu}{\frac{1}{2}M+\mu}\right)\frac{d^2}{R^2} - 1\right]\mu v_0^2 \end{aligned}$$

La minore perdita si ha per $d = R$,

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{2}(M+m)\,v_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= -\left[\left(\frac{1}{1+2\mu/M}\right)\right]\frac{1}{2}\mu v_0^2 \end{aligned}$$

Notare che la frazione dell'energia disponibile nel centro di massa che può essere dissipata è

$$1 - \left(\frac{\frac{2\mu}{M}}{1+\frac{2\mu}{M}}\right)\frac{d^2}{R^2} \leq 1$$

che è uguale a 1 solo per $d = 0$.

2 Urto elastico di una particella contro una sbarra

Una sbarra di lunghezza ℓ e massa M viene urtata elasticamente da una particella di massa m con velocità iniziale $\vec{v}_i$. L'urto avviene in una posizione y rispetto al centro di massa, e la velocità $\vec{v}_i$ è perpendicolare alla sbarra.

Esercizio 6. Calcolare la velocità finale della particella, la velocità finale del centro di massa della sbarra e la velocità angolare finale della sbarra.

Oltre all'energia nell'urto si conserva la quantità di moto e il momento angolare del sistema. Esplicitamente la conservazione dell'energia si scrive

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

quella della quantità di moto

$$\begin{aligned} mv_i &= mv_{fx} + MV_x \\ 0 &= mv_{fy} + MV_y \end{aligned}$$

e quella del momento angolare (ponendo la sbarra sull'asse y di un sistema di coordinate Cartesiane con il centro di massa nell'origine)

$$-mv_iy = -mv_{fx}y + I\omega$$

Infine si conserva la quantità di moto della particella lungo y, dato che durante l'urto le forze impulsive che la sbarra applica ad essa sono lungo x. Di conseguenza $v_{fy} = 0$ e $V_y = 0$. Le equazioni precedenti si riducono dunque a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_i^2 &= \frac{1}{2}mv_{fx}^2 + \frac{1}{2}MV_x^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ mv_i &= mv_{fx} + MV_x \\ 0 &= MV_xy + I\omega \end{aligned}$$

Ricaviamo ω:

$$\omega = -\frac{My}{I}V_x$$

e sostituendo nell'energia troviamo

$$\begin{aligned} (v_i - v_{fx})(v_i + v_{fx}) &= \frac{M}{m}\left(1 + \frac{My^2}{I}\right)V_x^2 \\ v_i - v_{fx} &= \frac{M}{m}V_x \end{aligned}$$

oppure, dividendo membro a membro,

$$\begin{aligned} v_i + v_{fx} &= \left(1 + \frac{My^2}{I}\right)V_x \\ v_i - v_{fx} &= \frac{M}{m}V_x \end{aligned}$$

Infine

$$
\begin{aligned}
V_x &= \frac{2v_i}{1+\frac{My^2}{I}+\frac{M}{m}} = \frac{2v_i}{1+\frac{12y^2}{\ell^2}+\frac{M}{m}} \\
v_{fx} &= \frac{1+\frac{My^2}{I}-\frac{M}{m}}{1+\frac{My^2}{I}+\frac{M}{m}} v_i = \frac{1+\frac{12y^2}{\ell^2}-\frac{M}{m}}{1+\frac{12y^2}{\ell^2}+\frac{M}{m}} v_i
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
\omega = -\frac{My}{I}\frac{2v_i}{1+\frac{My^2}{I}+\frac{M}{m}} = -\frac{12y}{\ell^2}\frac{2v_i}{1+\frac{12y^2}{\ell^2}+\frac{M}{m}}
$$

Esercizio 7. Calcolare le formule precedenti se l'urto avviene in un estremo della sbarra.

In questo caso $y = \ell/2$ e quindi

$$
\begin{aligned}
V_x &= \frac{2}{4+\frac{M}{m}} v_i \\
v_{fx} &= \frac{4-\frac{M}{m}}{4+\frac{M}{m}} v_i \\
\omega &= -\frac{12}{4+\frac{M}{m}} \frac{v_i}{\ell}
\end{aligned}
$$

Esercizio 8. Trovare un punto fisso per la sbarra.

Indicando con $\vec{r}_0$ la posizione del punto fisso rispetto al centro della sbarra abbiamo

$$
\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} V_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_0 & y_0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} V_x - \omega y_0 \\ \omega x_0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

e quindi deve essere

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0 \\
y_0 &= \frac{V_x}{\omega} = -\frac{I}{My} = -\frac{\ell^2}{12y}
\end{aligned}
$$

Il punto fisso ha quindi la stessa ascissa del centro di massa, e si trova dalla parte opposta rispetto ad esso rispetto al punto nel quale è avvenuta la collisione.

Esercizio 9. Dove si deve colpire la sbarra affinche il punto fisso coincida inizialmente con un estremo della sbarra? Disegnare qualitativamente il campo di velocità della sbarra nell'istante iniziale e dopo una rotazione di $\pi/2$.

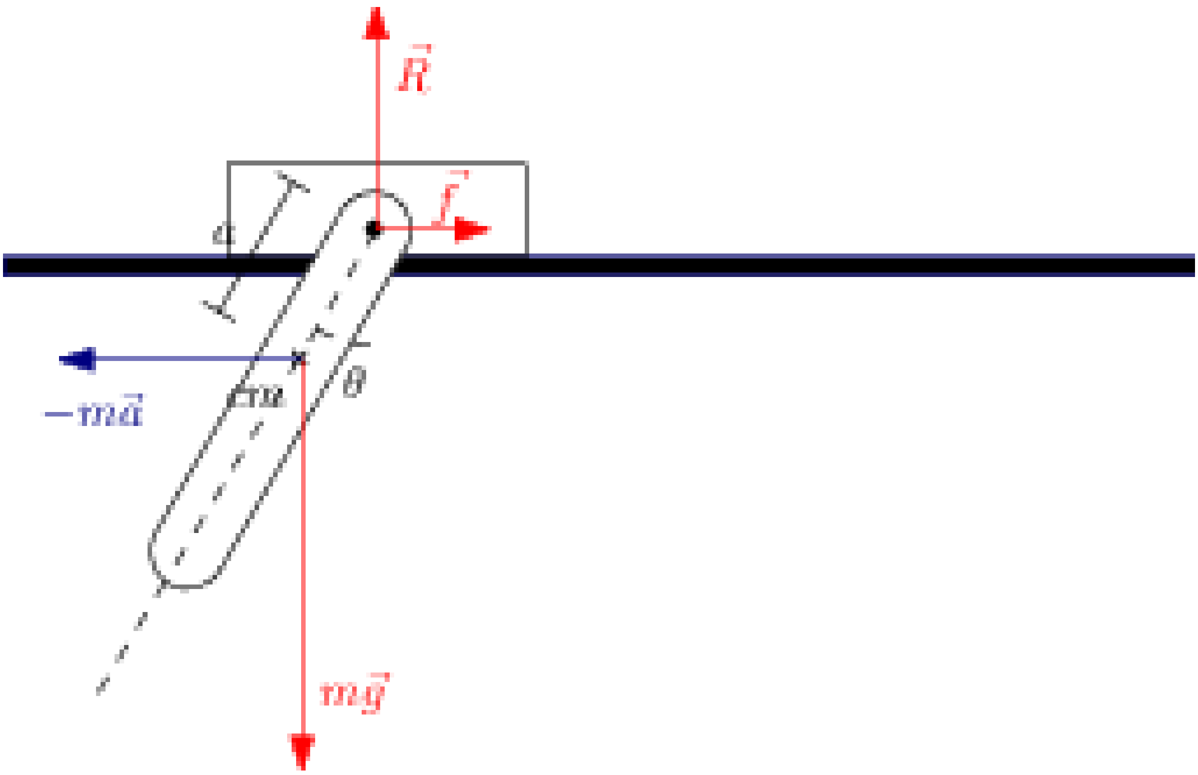

Figura 3.1: Le forze applicate alla sbarra. Dato che il supporto è privo di massa la forza orizzontale applicata ad esso è uguale alla componente orizzontale della reazione vincolare del perno. In blu è rappresentata la forza apparente, che è presente solo nel sistema di riferimento non inerziale.

3 Urto di un pendolo fisico contro un ostacolo

Un estremo di una sbarra sottile di lunghezza ℓ è imperniato e libero di ruotare attorno ad un supporto mobile. Questo può muoversi su un piano orizzontale privo di attrito. La massa del supporto è trascurabile, mentre quella della sbarra vale in totale m ed è distribuita su di essa in modo non noto. Si conosce però la posizione del centro di massa della sbarra, che si trova ad una distanza d dall'estremo imperniato. Inoltre il momento di inerzia della sbarra rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa vale $I_{cm} = km\ell^2$ con k costante.

Esercizio 10. Se al supporto è applicata una forza orizzontale costante f, quale deve essere l'angolo che la sbarra forma con la direzione verticale per rimanere in equilibrio?

Le forze in gioco sono rappresentate in Figura 3.1. Prima di tutto osserviamo che se l'angolo θ non varia l'accelerazione del sistema è data da

$$\vec{a} = \frac{1}{m} f \hat{x}$$

Consideriamo adesso diversi metodi di risoluzione.

Figura 3.2: Il sistema prima dell'urto.

Nel sistema di riferimento solidale con il blocco. Questo è un sistema di riferimento non inerziale, quindi avremo una forza apparente $-m\vec{a}$ applicata al centro di massa. Scegliendo il polo nel perno, avremo un momento totale dato da

$$M = -fd\cos\theta + mgd\sin\theta$$

che si annullerà quando

$$\tan\theta = \frac{f}{mg}$$

Nel sistema inerziale. Polo nel centro di massa. In questo caso la seconda equazione cardinale ci dice che

$$\frac{d}{dt}\left(I_{cm}\dot{\theta}\right) = Rd\sin\theta - fd\cos\theta = 0$$

ma dato che il centro di massa non accelera in verticale

$$R = mg$$

e troviamo nuovamente lo stesso risultato.

Nel sistema inerziale. Polo nel perno. In questo caso la seconda equazione cardinale si scrive

$$\frac{d}{dt}\left(I_{cm}\dot{\theta} + mvd\cos\theta\right) = mgd\sin\theta$$

ed anche se $\ddot{\theta} = 0$ il momento angolare del sistema cambia. Calcolando la derivata troviamo nuovamente

$$mad\cos\theta = mgd\sin\theta$$

e quindi lo stesso risultato.

Esercizio 11. Supponiamo che il supporto si trovi inizialmente in moto con velocità costante v_0, e che la sbarra sia in posizione verticale in equilibrio stabile. Ad un certo momento il supporto incontra un ostacolo che lo blocca improvvisamente. Calcolare per quale valore minimo di v_0 la sbarra compie un giro completo.

Facciamo riferimento alla Figura 3.2. Nell'urto si conserva il momento angolare rispetto al perno. Quindi

$$m d v_0 = \left(I_{cm} + m d^2\right) \omega$$

da cui la velocità angolare dopo l'urto

$$\omega = \frac{d}{k\ell^2 + d^2} v_0$$

Da questo momento l'energia si conserva, e l'asta sarà in grado di compiere un giro completo se

$$\frac{1}{2}\left(I_{cm} + m d^2\right) \omega^2 \geq 2 m g d$$

cioè per

$$v_0 \geq 2\sqrt{g d \left(1 + k\frac{\ell^2}{d^2}\right)}$$

Esercizio 12. Nel caso precedente, quale relazione di deve essere tra k e a affinché l'energia si conservi nell'urto?

La variazione di energia nell'urto è

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{1}{2}\left(I_{cm} + m d^2\right) \omega^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left[\frac{d^2}{k\ell^2 + d^2} - 1\right] v_0^2\end{aligned}$$

che si annulla se $k = 0$. Questo significa che la massa della sbarra è tutta concentrata nel suo centro di massa, che si può trovare in una posizione arbitraria.