

Esercitazioni di Fisica 1

G. Cella

Ultima versione: 21 gennaio 2014

Applicazioni dell'analisi dimensionale.

1 Conversioni di unità di misura

Esercizio 1. Definendo il metro come $1/(40 \times 10^6)$ del meridiano terrestre, e il miglio marino (abbreviato nmi) come l'arco del meridiano terrestre corrispondente a $1'$, esprimere quest'ultimo in metri.

Dimostrazione. Detto R_{\oplus} il raggio terrestre abbiamo

$$1\text{m} = \frac{2\pi R_{\oplus}}{40 \times 10^6} \quad (1.1)$$

ma anche

$$1\text{nmi} = 2\pi R_{\oplus} \frac{1'}{360^\circ} = 2\pi R_{\oplus} \frac{1}{360 \times 60} \quad (1.2)$$

e quindi confrontando

$$1\text{nmi} = \frac{40 \times 10^6}{360 \times 60} \text{m} \simeq 1852\text{m} \quad (1.3)$$

□

Esercizio 2. Il nodo è un'unità di misura della velocità, corrispondente a un miglio marino all'ora. Esprimerlo in m/s e in km/h.

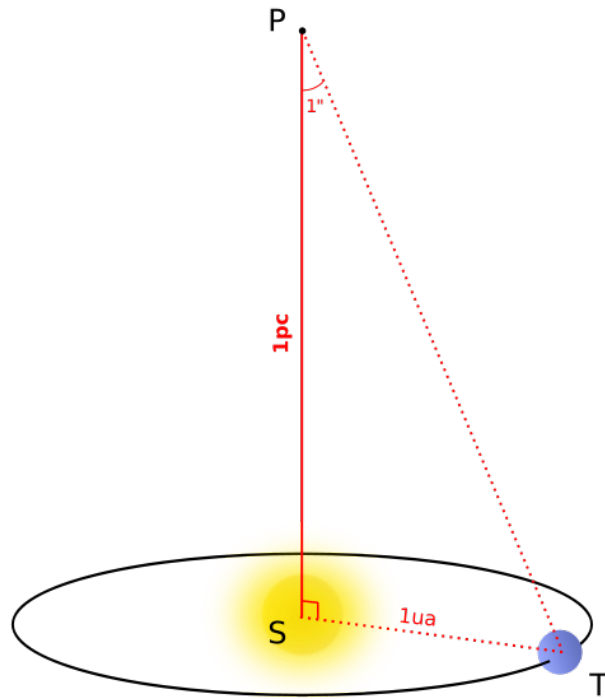


Figura 1.1: Definizione del parsec.

Dimostrazione. Abbiamo

$$1\text{ nodo} = \frac{1\text{nmi}}{1\text{h}} = \frac{1852\text{m}}{3600\text{s}} = 0.51\text{m/s} \quad (1.4)$$

e anche

$$1\text{ nodo} = \frac{1\text{nmi}}{1\text{h}} = \frac{1.852\text{km}}{1\text{h}} = 1.85\text{km/h} \quad (1.5)$$

□

Esercizio 3. Il parsec (pc) è definito come la distanza alla quale si trova una stella che subisce vista dalla terra una parallasse annuale di un secondo d'arco. Calcolare il valore di un parsec in metri, sapendo che la distanza media della terra dal sole (la cosiddetta unità astronomica, UA) vale $1\text{UA} = 1.496 \times 10^{11}\text{m}$.

Dimostrazione. Facendo riferimento alla Figura 1.1 abbiamo

$$1\text{UA} = 1\text{pc} \tan \left(2\pi \frac{1''}{360^\circ} \right) \quad (1.6)$$

ossia (notare che $\tan x \simeq x$ se $|x| \ll 1$)

$$1\text{pc} = \frac{1.496 \times 10^{11}\text{m}}{\tan\left(\frac{2\pi}{360 \times 60 \times 60}\right)} \simeq \frac{1.496 \times 10^{11}\text{m}}{\tan(4.8 \times 10^{-6})} \simeq \frac{1.496 \times 10^{11}\text{m}}{4.8 \times 10^{-6}} \simeq 3.1 \times 10^{16}\text{m} \quad (1.7)$$

□

Esercizio 4. Esprimere l'inverso della costante di Hubble, data da $H_0 = 65\text{km/s/Mpc}$, in secondi.

Dimostrazione. Abbiamo

$$H_0^{-1} = \frac{1 \text{ Mpc}}{65 \text{ km}} = \frac{10^6 \times 3.1 \times 10^{16}\text{ms}}{65 \times 10^3\text{m}} \simeq 4.8 \times 10^{17}\text{s} \quad (1.8)$$

□

2 Semplici applicazioni dell'analisi dimensionale

Esercizio 5. Analizzare dimensionalmente il problema del periodo di oscillazione di un pendolo inizialmente verticale e con velocità v_0 .

Dimostrazione. I parametri in gioco sono la massa del pendolo m , la sua lunghezza ℓ , l'accelerazione di gravità g e la velocità iniziale v_0 . Vogliamo con essi costruire una grandezza delle dimensioni di un tempo, cioè

$$[m^\alpha \ell^\beta g^\gamma v_0^\delta] = M^\alpha L^{\beta+\gamma+\delta} T^{-2\gamma-\delta} = T \quad (2.1)$$

Otteniamo il sistema

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta + \gamma + \delta &= 0 \\ -2\gamma - \delta &= 1 \end{aligned}$$

che può essere risolto nella forma

$$\begin{aligned}\alpha &= 0 \\ \beta &= \frac{1-\delta}{2} \\ \gamma &= -\frac{1+\delta}{2}\end{aligned}$$

con δ arbitrario. Quindi qualsiasi combinazione del tipo

$$\ell^{\frac{1-\delta}{2}} g^{-\frac{1+\delta}{2}} v_0^\delta = \left(\frac{v_0^2}{\ell g}\right)^{\frac{\delta}{2}} \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

ha le dimensioni di un tempo. La soluzione per il periodo sarà quindi della forma

$$T = f\left(\frac{v_0^2}{\ell g}\right) \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (2.2)$$

dove f è una funzione arbitraria del parametro adimensionale

$$\Pi_1 = \frac{v_0^2}{\ell g}$$

Questa funzione esprime una possibile dipendenza (che in effetti esiste) del periodo di oscillazione di un pendolo dalla sua ampiezza. Il principio di isocronia delle oscillazioni, valido approssimativamente per piccole ampiezze, ci dice che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = C \quad (2.3)$$

dove C è una costante strettamente maggiore di zero. Risolvendo le equazioni del moto si trova che la formula è corretta, e che $C = 2\pi$. \square

Esercizio 6. Un paracadutista si lancia nel vuoto, e risente di una forza di attrito viscoso proporzionale alla velocità,

$$F = -\gamma v \quad (2.4)$$

Sulla base di considerazioni dimensionali si determini il tempo di caduta dall'altezza iniziale h , e discutere il limite di attrito trascurabile.

Dimostrazione. Vogliamo determinare una grandezza delle dimensioni di un tempo dai parametri supposti rilevanti, cioè m , h , γ e g . Le dimensioni di γ sono anzitutto

$$[\gamma] = \frac{[F]}{[v]} = M^1 L^0 T^{-1} \quad (2.5)$$

e abbiamo

$$[m^{c_1} h^{c_2} \gamma^{c_3} g^{c_4}] = M^{c_1+c_3} L^{c_2+c_4} T^{-c_3-2c_4} \quad (2.6)$$

quindi deve essere

$$c_1 + c_3 = 0 \quad (2.7)$$

$$c_2 + c_4 = 0 \quad (2.8)$$

$$-c_3 - 2c_4 = 1 \quad (2.9)$$

da cui

$$c_1 = 2c_4 + 1 \quad (2.10)$$

$$c_2 = -c_4 \quad (2.11)$$

$$c_3 = -2c_4 - 1 \quad (2.12)$$

La conclusione è che la combinazione

$$m^{2c_4+1} h^{-c_4} \gamma^{-2c_4-1} g^{c_4} = \frac{m}{\gamma} \left(\frac{m^2 g}{\gamma^2 h} \right)^{c_4} \quad (2.13)$$

ha le dimensioni richieste per un valore arbitrario di c_4 . È chiaro inoltre che la combinazione

$$\Pi_1 = \frac{gm^2}{h\gamma^2} \quad (2.14)$$

è adimensionale, quindi potremo scrivere per il tempo di caduta τ

$$\tau = \frac{m}{\gamma} F \left(\frac{m^2 g}{\gamma^2 h} \right) \quad (2.15)$$

dove F è una funzione arbitraria. Da un esercizio svolto precedentemente sappiamo che nel limite di attrito trascurabile deve essere

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{m}{\gamma} F\left(\frac{m^2 g}{\gamma^2 h}\right) = k \sqrt{\frac{h}{g}} \quad (2.16)$$

questo significa che per grandi valori di x deve essere

$$F(x) \sim \frac{k}{\sqrt{x}} \quad (2.17)$$

□

Esercizio 7. Si osserva che un paracadutista in caduta raggiunge una velocità limite costante. Determinare tale velocità limite sulla base di considerazioni dimensionali.

Dimostrazione. Possiamo ripetere le considerazioni fatte all'esercizio precedente, cercando questa volta una grandezza delle dimensioni di una velocità. Da

$$[m^{c_1} h^{c_2} \gamma^{c_3} g^{c_4}] = M^{c_1+c_3} L^{c_2+c_4} T^{-c_3-2c_4} \quad (2.18)$$

otteniamo stavolta

$$c_1 + c_3 = 0 \quad (2.19)$$

$$c_2 + c_4 = 1 \quad (2.20)$$

$$-c_3 - 2c_4 = -1 \quad (2.21)$$

da cui

$$c_1 = 1 - 2c_2 \quad (2.22)$$

$$c_4 = 1 - c_2 \quad (2.23)$$

$$c_3 = 2c_2 - 1 \quad (2.24)$$

Quindi per qualsiasi valore di c_2 la quantità

$$\frac{mg}{\gamma} \left(\frac{h\gamma^2}{gm^2}\right)^{c_2} \quad (2.25)$$

ha le dimensioni cercate. D'altra parte la velocità limite non può dipendere da h per definizione, e quindi $c_2 = 0$. In conclusione sarà

$$v_{LIM} = k \frac{mg}{\gamma} \quad (2.26)$$

dove k è la solita costante adimensionale indeterminata. Se ci avessimo interessato la velocità con cui il paracadutista arrivava al suolo avremmo scritto

$$v_{FIN} = \frac{mg}{\gamma} F \left(\frac{h\gamma^2}{gm^2} \right) \quad (2.27)$$

con F funzione arbitraria, e dall'esistenza di una velocità limite avremmo potuto concludere che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = C \quad (2.28)$$

con $C > 0$. □