Esercitazioni di Fisica 1

G. Cella

Ultima versione: 21 gennaio 2014

Cinematica

1 Automobili e api

Due automobili, inizialmente separate da una distanza $L_0 = 1600$ m, cominciano a muoversi l'una verso l'altra di moto rettilineo uniforme con velocità rispettivamente $V_1 = 30\,\mathrm{m/s}$ e $V_2 = -50\,\mathrm{m/s}$.

Esercizio 1. Dopo quanto tempo le automobili si incontreranno?

Risolviamo il problema scrivendo le leggi orarie delle due automobili, valide per $t > 0$. Abbiamo la coppia di equazioni

$$\begin{aligned} s_1 &= V_1 t && (1.1)\\ s_2 &= L_0 + V_2 t && (1.2) \end{aligned}$$

che forniscono, in funzione del tempo, la posizione delle due automobili. All'istante t^* dell'incontro deve essere $s_1 = s_2$, cioè

$$V_1 t^* = L_0 + V_2 t^* \tag{1.3}$$

che risolte per il tempo da

$$t^* = \frac{L_0}{V_1 - V_2} = \frac{1600\,\mathrm{m/s}}{30\,\mathrm{m/s} - (-50\,\mathrm{m/s})} = 20\,\mathrm{s} \tag{1.4}$$

La posizione delle macchine a questo istante sarà

$$s_1 = s_2 = \frac{V_1}{V_1 - V_2} L_0 \tag{1.5}$$

Esercizio 2. Il problema ammette soluzioni accettabili per qualsiasi coppia di valori V_1, V_2?

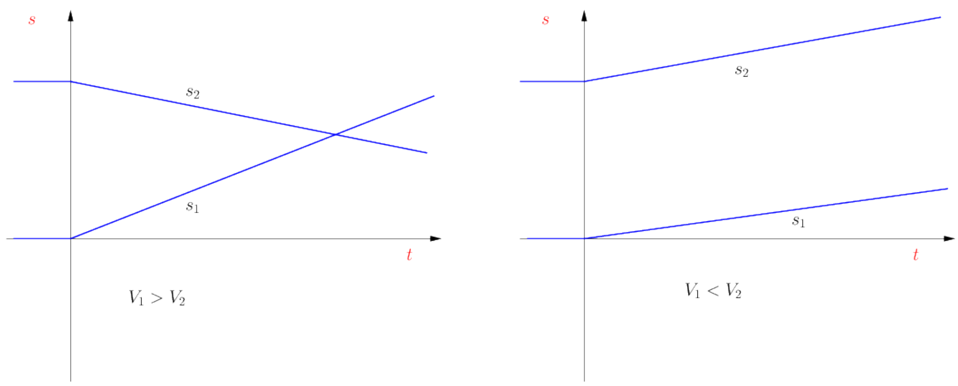

Figura 1.1: Rappresentazione grafica del moto delle due automobili, nei casi $V_1 > V_2$ e $V_1 < V_2$.

Dalla formula ottenuta per il tempo di incontro t^* segue che per avere $t^* > 0$ deve essere $V_1 > V_2$. Se $V_1 < V_2$ la soluzione $t^* < 0$ deve essere scartata perchè le leggi orarie utilizzate sono valide solo per $t > 0$. La soluzione rappresenta l'ipotetico istante di incontro delle due automobili se il loro moto fosse sempre stato rettilineo uniforme. Infine se $V_1 = V_2$ non esistono soluzioni, accettabili o meno. Questo corrisponde al fatto che se le due automobili hanno la stessa velocità non si incontrano mai.

Esercizio 3. Rappresentare graficamente il moto delle due automobili in un piano cartesiano, dove le ascisse corrispondono al tempo e le ordinate alla posizione. Dare la rappresentazione anche per $t < 0$

Dalle leggi orarie segue che i due moti sono rappresentati, per $t > 0$, da due rette come in Figura 1.1. Per $t < 0$ si hanno le due rette orizzontali

$$s_1 = 0 \tag{1.6}$$
$$s_2 = L_0 \tag{1.7}$$

Il punto di intersezione determina il tempo e la posizione alla quale avviene l'incontro. Notare che in questa rappresentazione la velocità corrisponde al coefficiente angolare della retta. Se $V_1 \leq V_2$ non si ha nessuna intersezione.

Nelle condizioni del problema precedente un'ape parte a $t = 0$ dalla prima automobile, dirigendosi con velocità $V_A = 60\,\mathrm{m/s}$ verso la seconda. Arrivata a questa cambia direzione e torna indietro fino alla prima, e così via.

Esercizio 4. Al momento dell'incontro tra le automobili quanto spazio avrà percorso l'ape?

Calcoliamo prima di tutto lo spazio $\ell^{(1)}$ percorso dall'ape nei primi due "viaggi" (dall'automobile 1 alla 2 e viceversa). Possiamo utilizzare le Equazioni (1.5) e (1.4) (l'ape sostituisce la prima macchina) per calcolare la lunghezza e la durata del primo viaggio:

$$\Delta t_{\text{andata}} = \frac{L_0}{V_A - V_2} \tag{1.8}$$

$$\ell_{\text{andata}} = \frac{V_A L_0}{V_A - V_2} \tag{1.9}$$

La distanza tra i vagoni è diventata adesso

$$\begin{aligned} L_{\text{andata}} &= s_2(t_{\text{andata}}) - s_1(t_{\text{andata}}) \\ &= L_0 + V_2 \Delta t_{\text{andata}} - V_1 \Delta t_{\text{andata}} \\ &= L_0 - \frac{V_1 - V_2}{V_A - V_2} L_0 \\ &= \frac{V_A - V_1}{V_A - V_2} L_0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

e possiamo calcolare la durata e la lunghezza del viaggio di ritorno dalle solite equazioni con le sostituzioni

$$L_0 \rightarrow L_{\text{andata}} \tag{1.11}$$

$$V_2 \rightarrow -V_A \tag{1.12}$$

da cui

$$\Delta t_{\text{ritorno}} = \frac{L_{\text{andata}}}{V_1 + V_A} = \frac{V_A - V_1}{V_A - V_2} \frac{L_0}{V_1 + V_A} \tag{1.13}$$

$$\ell_{\text{ritorno}} = \frac{V_A - V_1}{V_A - V_2} \frac{V_A L_0}{V_1 + V_A} \tag{1.14}$$

Lo spazio percorso fino a questo momento è

$$\ell^{(1)} = \ell_{\text{andata}} + \ell_{\text{ritorno}} = \frac{2V_A^2}{(V_A + V_1)(V_A - V_2)} L_0$$

Adesso la distanza tra le due auto è diventata

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= L_0 + (V_2 - V_1)\left(t_{\text{andata}} + t_{\text{ritorno}}\right) \\ &= \frac{(V_2 + V_A)(V_A - V_1)}{(V_A - V_2)(V_1 + V_A)} L_0 \end{aligned} \tag{1.15}$$

cioè si è ridotta di un fattore dipendente dalle velocità di ape e automobili. É chiaro che questo avverrà ad ogni "viaggio". La distanza tra le due auto dopo n viaggi di andata e ritorno sarà dunque

$$L^{(n)} = \left[\frac{(V_2 + V_A)(V_A - V_1)}{(V_A - V_2)(V_1 + V_A)}\right]^n L_0 \tag{1.16}$$

e lo spazio percorso dall'ape nell'andata e ritorno successivi sarà

$$\ell^{(n)} = \left[\frac{(V_2+V_A)(V_A-V_1)}{(V_A-V_2)(V_1+V_A)}\right]^n \frac{2V_A^2}{(V_A+V_1)(V_A-V_2)}L_0$$

Possiamo sommare su tutti i viaggi per ottenere il risultato cercato:

$$\ell = \sum_{n=0}^{\infty} \ell^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(V_2+V_A)(V_A-V_1)}{(V_A-V_2)(V_1+V_A)}\right]^n \frac{2V_A^2}{(V_A+V_1)(V_A-V_2)}L_0 \tag{1.17}$$

Ricordando che la somma di una serie geometrica è data (quando $|x| < 1$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \tag{1.18}$$

otteniamo infine

$$\ell = \frac{V_A L_0}{V_1 - V_2} \tag{1.19}$$

Il risultato precedente si poteva ottenere anche col procedimento seguente (consigliato)[1].

Il tempo di volo totale dell'ape è tra l'istante iniziale e l'istante in cui le due automobili si incontrano, già determinato precedentemente (Equazione (1.4)). Lo spazio totale percorso sarà dato da

$$\ell = V_A t^* = V_A \frac{L_0}{V_1 - V_2} = 60\,\mathrm{m/s} \times 20\,\mathrm{s} = 1200\,\mathrm{m} \tag{1.20}$$

Esercizio 5. Stimare il numero di viaggi fatti dall'ape tenendo conto delle sue dimensioni. Quando dovrebbe essere grande per fare almeno 10 viaggi?

Considerando un'ape lunga $\delta = 1\,\mathrm{cm}$, i viaggi si concluderanno quando la distanza tra le due automobili raggiungerà tale valore. Possiamo quindi scrivere

$$\delta = L^{(N)} = \left[\frac{(V_2+V_A)(V_A-V_1)}{(V_A-V_2)(V_1+V_A)}\right]^N L_0 \tag{1.21}$$

dove N è il numero di viaggi (andata e ritorno) cercato. Abbiamo

$$N = \frac{\log[\delta/L_0]}{\log\left[\frac{(V_2+V_A)(V_A-V_1)}{(V_A-V_2)(V_1+V_A)}\right]} = \frac{\log\left[\frac{10^{-2}\,\mathrm{m}}{1600\,\mathrm{m}}\right]}{\log\left[\frac{1}{33}\right]} \simeq 3.4 \tag{1.22}$$

Per poter fare 100 viaggi dovrà essere

$$\delta = \left[\frac{(V_2+V_A)(V_A-V_1)}{(V_A-V_2)(V_1+V_A)}\right]^{10} L_0 = \left(\frac{1}{33}\right)^{10} 1600\,\mathrm{m} \simeq 10^{-12}\mathrm{m} \tag{1.23}$$

Notare che il raggio (di Bohr) di un atomo di idrogeno vale 5×10^{-11} m.

[1]Non deprimetevi se non avete scelto questa strada dall'inizio, siete in buona compagnia. Secondo un aneddoto John von Neumann risolse il problema, che gli era stato proposto, sommando mentalmente la serie.

2 Semafori

Esercizio 6. Un automobilista si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v_0. Arriva a una distanza d da un incrocio quando il semaforo diventa giallo. Deve decidere se frenare (con una accelerazione costante $-a < 0$) oppure se continuare con velocità costante, in modo da non rimanere in mezzo all'incrocio quando il semaforo diventerà rosso, o di passare con il rosso. Sapendo che la larghezza dell'incrocio da attraversare è h e che la durata del segnale giallo è τ discutere la possibilità di scegliere una o entrambe le alternative.

Se l'automobilista decide di continuare a muoversi a velocità costante, riuscirà ad attraversare l'incrocio se

$$v_0\tau > d + h \tag{2.1}$$

Se invece decide di frenare, si arresterà ad un tempo t_* determinato da

$$0 = v_0 - at_* \tag{2.2}$$

ossia

$$t_* = \frac{v_0}{a} \tag{2.3}$$

Quando il semaforo diviene rosso l'automobilista si può trovare nelle seguenti situazioni accettabili:

1. si è già fermato, prima dell'incrocio:

$$\tau > t_* \bigcap s(t_*) < d$$

2. si è già fermato, oltre l'incrocio:

$$\tau > t_* \bigcap s(t_*) > d + h$$

3. non si è ancora fermato, ma è già oltre l'incrocio:

$$\tau < t_* \bigcap s(\tau) > d + h$$

4. non si è ancora fermato, ma riuscirà a fermarsi prima dell'incrocio:

$$\tau < t_* \bigcap s(\tau) < d$$

dove

$$s(t) = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$$

Per discutere le varie possibilità scriviamo esplicitamente le condizioni precedenti:

1. si è già fermato, prima dell'incrocio:

$$\tau > \frac{v_0}{a} \bigcap \frac{v_0^2}{2a} < d$$

2. si è già fermato, oltre l'incrocio:

$$\tau > \frac{v_0}{a} \bigcap \frac{v_0^2}{2a} > d + h$$

3. non si è ancora fermato, ma è già oltre l'incrocio:

$$\tau < \frac{v_0}{a} \bigcap v_0\tau - \frac{1}{2}a\tau^2 > d + h$$

4. non si è ancora fermato, ma riuscirà a fermarsi prima dell'incrocio:

$$\tau < \frac{v_0}{a} \bigcap v_0\tau - \frac{1}{2}a\tau^2 < d$$

e riesprimiamole nella forma

1. si è già fermato, prima dell'incrocio:

$$\left(\Pi_2 > \frac{1}{2}\right) \bigcap \left(\Pi_1 < 4\Pi_2\right)$$

2. si è già fermato, oltre l'incrocio:

$$\left(\Pi_2 > \frac{1}{2}\right) \bigcap \left[\Pi_1 > 4\Pi_2\left(1 + \Pi_3\right)\right]$$

3. non si è ancora fermato, ma è già oltre l'incrocio:

$$\left(\Pi_2 < \frac{1}{2}\right) \bigcap \left[\Pi_1\left(1 - \Pi_2\right) > 1 + \Pi_3\right]$$

4. non si è ancora fermato, ma riuscirà a fermarsi prima dell'incrocio:

$$\left(\Pi_2 < \frac{1}{2}\right) \bigcap \left[\Pi_1\left(1 - \Pi_2\right) < 1\right]$$

in funzione delle variabili adimensionali

$$\Pi_1 = \frac{v_0\tau}{d}, \quad \Pi_2 = \frac{a\tau}{2v_0}, \quad \Pi_3 = \frac{h}{d} \tag{2.4}$$

mentre la (2.1) diverrà

$$\Pi_1 > 1 + \Pi_3 \tag{2.5}$$

Possiamo adesso studiare graficamente queste relazioni nel piano Π_1, Π_3 al variare di Π_2.

Alcuni grafici sono riportati in Figura 2.1. Nella zona solo gialla (non ricoperta dall'area verde) l'unica scelta possibile è non frenare. Nella zona rossa l'unica scelta possibile è frenare. Infine nella regione arancio o verde sono possibili entrambe le alternative.

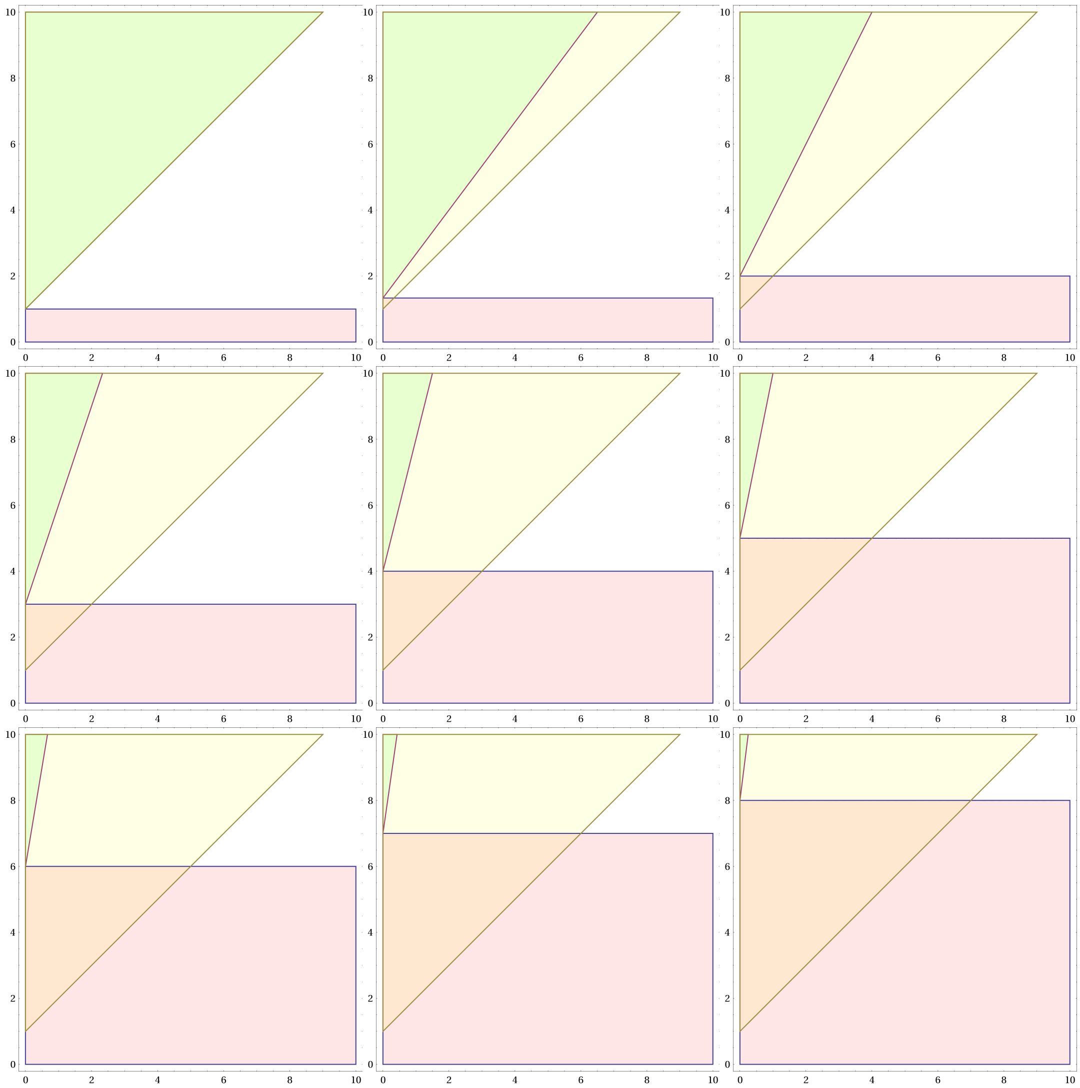

Figura 2.1: Le regioni ammesse nel piano Π_3, Π_2 (Π_3 è l'asse verticale, Π_1 quello orizzontale) al variare di Π_2. Partendo dall'alto verso il basso e da sinistra a destra $\Pi_2 = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 5/4, 3/2, 7/4, 2$. La regione gialla, che non dipende da Π_2 e quindi è la stessa in tutte le figure, corrisponde alle combinazioni dei parametri per i quali è possibile non frenare. La regione rossa corrisponde a una frenata che porta a fermarsi prima del semaforo. Quella azzurra corrisponde a una frenata che porta a fermarsi oltre il semaforo, senza rimanere in mezzo. All'aumentare di Π_2 (frenata "forte") la regione rossa aumenta, quella azzurra si restringe. Il verde indica una sovrapposizione di regione azzurra e regione gialla, l'arancio una sovrapposizione di regione gialla e regione rossa.

3 Profondità di un pozzo

Per determinare la profondità di un pozzo si lancia un sasso al suo interno, e si misura il tempo τ dopo il quale si sente il suono dell'urto sul fondo. Nel seguito si indicherà con c_s la velocità del suono e si trascurerà l'attrito dell'aria.

Esercizio 7. Sulla base di considerazioni dimensionali dire come la profondità h del pozzo può dipendere dai parametri del problema.

I parametri del problema e le loro dimensionalità sono indicate come segue:

$$
\begin{aligned}
[h] &= L \\
[g] &= LT^{-2} \\
[c_s] &= LT^{-1} \\
[\tau] &= T
\end{aligned}
$$

Con gli ultimi tre è possibile ottenere l'unica combinazione adimensionale indipendente

$$\Pi_1 = \frac{c_s}{g\tau}$$

per cui potremo scrivere

$$h = c_s \tau \, \Phi \left(\frac{c_s}{g\tau} \right)$$

Esercizio 8. Determinare esplicitamente h.

Il tempo τ è dato dalla somma del tempo di caduta τ_c per il sasso e del tempo impiegato dal suono τ_s per tornare all'osservatore. La caduta avviene, trascurando gli attriti, con moto uniformemente accelerato quindi

$$h = \frac{1}{2} g \tau_c^2$$

cioè .

$$\tau_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Il suono si muove con velocità costante, quindi

$$\tau_s = \frac{h}{c_s} \, .$$

Il tempo misurato sarà dunque

$$\tau = \tau_c + \tau_s = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{c_s}$$

Questa è un'equazione di secondo grado nell'incognita $\sqrt{h}$

$$h + \sqrt{\frac{2c_s^2}{g}}\sqrt{h} - c_s\tau = 0$$

che ammette come unica soluzione accettabile (perché positiva)

$$h = \left(\sqrt{\frac{c_s^2}{2g} + c_s\tau} - \sqrt{\frac{c_s^2}{2g}}\right)^2 \tag{3.1}$$

Esercizio 9. Mostrare che il risultato precedente per h è in accordo con quanto previsto dall'analisi dimensionale, e discutere il limite $\Pi_1 \ll 1$ e $\Pi_1 \gg 1$.

Raccogliendo dal risultato (3.1) il fattore $c_s\tau$ troviamo

$$\begin{aligned} h &= c_s\tau\left(\sqrt{\frac{c_s}{2g\tau} + 1} - \sqrt{\frac{c_s}{2g\tau}}\right)^2 \\ &= c_s\tau\Phi\left(\frac{c_s}{g\tau}\right) \end{aligned}$$

in accordo con quanto previsto, con

$$\Phi\left(\Pi_1\right) = \left(\sqrt{\frac{\Pi_1}{2} + 1} - \sqrt{\frac{\Pi_1}{2}}\right)^2$$

Quando $\Pi_1 \ll 1$ possiamo scrivere

$$\Phi\left(\Pi_1\right) \simeq 1$$

e quindi

$$h \simeq c_s\tau$$

L'interpretazione di questo risultato è la seguente: se $\Pi_1 \ll 1$ la velocità raggiunta dal proiettile è molto maggiore della velocità del suono, quindi il tempo τ sarà dominato dalla propagazione di quest'ultimo.

Se invece $\Pi_1 \gg 1$ conviene scrivere

$$\Phi\left(\Pi_1\right) = \frac{\Pi_1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{2}{\Pi_1}} - 1\right)^2$$

e dato che $2\Pi_1^{-1} \ll 1$ possiamo usare l'approssimazione (valida per $x \ll 1$)

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)$$

ottenendo

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\Pi_1\right) &= \frac{\Pi_1}{2}\left[1+\frac{1}{\Pi_1}-1+O\left(\frac{1}{\Pi_2^2}\right)\right]^2 \\
&= \frac{\Pi_1}{2}\left[\frac{1}{\Pi_1}+O\left(\frac{1}{\Pi_2^2}\right)\right]^2 \\
&= \frac{1}{2\Pi_1}+O\left(\frac{1}{\Pi_1^2}\right)
\end{aligned}$$

e quindi

$$h \simeq c_s\tau\frac{1}{2}\frac{g\tau}{c_s}=\frac{1}{2}g\tau^2$$

In questo caso l'interpretazione è la seguente: la velocità del proiettile resta sempre piccola rispetto a quella del suono, ed il tempo τ è dominato dal tempo di caduta.