Esercitazioni di Fisica 1

Ultima versione: 21 gennaio 2014

Moto in due dimensioni, in coordinate cartesiane e polari.

1 Moto parabolico

Analizziamo un semplice moto uniformemente accelerato in due dimensioni, definito dalla legge oraria

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \tag{1.1}$$

Per concretezza siamo interessati al caso in cui $\vec{a}$ è l'accelerazione di gravità. Sceglieremo un sistema di riferimento nel quale

$$\vec{a} = -g\hat{e}_y \tag{1.2}$$

Possiamo inoltre scrivere

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\hat{e}_x + y\hat{e}_y \\ \vec{r}_0 &= \vec{0} \\ \vec{v}_0 &= v_{0x}\hat{e}_x + v_{0y}\hat{e}_y \end{aligned} \tag{1.3}$$

e ottenere le leggi orarie

$$x = v_{0x}t \tag{1.4}$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.5}$$

Esercizio 1. Derivare le relazioni (1.4) e (1.5) dalle definizioni precedenti.

Facendo il prodotto scalare di ambo i membri della (1.1) con $\hat{e}_x$ otteniamo

$$\vec{r} \cdot \hat{e}_x = \vec{r}_0 \cdot \hat{e}_x + \vec{v}_0 \cdot \hat{e}_x t + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \hat{e}_x t^2 \tag{1.6}$$

ma dalle definizioni (1.2) e (1.3) segue che $\vec{r}_0 \cdot \hat{e}_x = 0$, $\vec{r} \cdot \hat{e}_x = x$, $\vec{v} \cdot \hat{e}_x = v_{0x}$ e $\vec{a} \cdot \hat{e}_x = 0$, quindi otteniamo l'Equazione (1.4). Analogamente prendendo il prodotto scalare con $\hat{e}_y$ abbiamo

$$\vec{r} \cdot \hat{e}_y = \vec{r}_0 \cdot \hat{e}_y + \vec{v}_0 \cdot \hat{e}_y t + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \hat{e}_y t^2 \tag{1.7}$$

e usando $\vec{r}_0 \cdot \hat{e}_y = 0$, $\vec{r} \cdot \hat{e}_y = y$, $\vec{v} \cdot \hat{e}_y = v_{0y}$ e $\vec{a} \cdot \hat{e}_y = -g$ ottenamo l'Equazione (1.5).

Le leggi orarie danno una descrizione completa del moto. In particolare possiamo ottenere le componenti della velocità. In notazione vettoriale abbiamo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

e quindi (usando la relazione precedente oppure derivando le (1.4) e (1.5))

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_{0x} \qquad (1.8) \\ \dot{y} &= v_{0y} - gt \qquad (1.9) \end{aligned}$$

Analogamente possiamo ottenere l'accelerazione

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \\ \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= -g \end{aligned}$$

$\square$

In certi casi può essere utile avere a disposizione una relazione diretta tra coordinata x e coordin_ata y che esprima la traiettoria.

Questo si può ottenere facilmente eliminando il tempo dalle leggi orarie. Abbiamo

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} x^2 \tag{1.10}$$

Esercizio 2. Derivare l'equazione precedente

Dalla (1.4) otteniamo

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

e sostituendo nella (1.5) troviamo

$$y = v_{0y} \left(\frac{x}{v_{0x}} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{0x}} \right)^2$$

cioè la (1.10).

□

Esercizio 3 (Lancio del peso)**.** Considerare la traiettoria di un peso lanciato da un'altezza h con velocità iniziale v_0 inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo α. Determinare α in modo che la gittata sia massima.

Scriviamo le leggi orarie. Abbiamo

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos \alpha t \\ y(t) &= h + v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

Il peso arriverà al suolo quando $y = 0$, cioè al tempo τ determinato da

$$y(\tau) = h + v_0 \sin \alpha \tau - \frac{1}{2} g \tau^2 = 0$$

Risolvendo l'equazione troviamo

$$\tau = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

e tra le due soluzioni quella accettabile è la positiva. Calcolando $x(\tau)$ troviamo la gittata ℓ

$$\ell = x(\tau) = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} + \cos\alpha \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 \sin^2\alpha + \frac{2hv_0^2}{g}} \tag{1.11}$$

Troviamo il massimo di ℓ rispetto ad α. Derivando abbiamo

$$\frac{d\ell}{d\alpha} = \frac{v_0^2}{g}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) - \sin\alpha \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 \sin^2\alpha + \frac{2hv_0^2}{g}}$$
$$+ \frac{\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 \sin^2\alpha + \frac{2hv_0^2}{g}}} \sin\alpha \cos^2\alpha = 0$$

e moltiplicando per il denominatore dell'ultimo termine

$$\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2hg}{v_0^2}} = \sin\alpha \left(\sin^2\alpha + \frac{2hg}{v_0^2} - \cos^2\alpha\right)$$

Eleviamo al quadrato ambo i membri

$$\left(1 - 2\sin^2\alpha\right)^2 \left(\sin^2\alpha + \frac{2hg}{v_0^2}\right) = \sin^2\alpha \left(2\sin^2\alpha + \frac{2hg}{v_0^2} - 1\right)^2$$

e semplificando otteniamo

$$1 - \left(2 + \frac{2hg}{v_0^2}\right) \sin^2\alpha = 0$$

da cui, ponendo $\Pi = hg/v_0$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\Pi}$$

Per $h = 0$ questo si riduce a $\sin^2\alpha = 1/2$, cioè $\alpha = \pi/4$, come deve essere. Per $h \gg v_0^2/g$ $\sin^2\alpha = 0$, quindi conviene lanciare il proiettile in orizzontale. Calcoliamo adesso la gittata massima. Riscriviamo la (1.11) nella forma

$$\ell = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{1-\sin^2\alpha}\left[\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + 2\Pi}\right]$$

e sostituendo il valore di $\sin\alpha$ precedentemente determinato troviamo

$$\ell = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{1+2\Pi} = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2}}$$

Per $h = 0$ ($\Pi = 0$) abbiamo $\ell = v_0^2/g$. Per $g \gg v_0^2/g$ ($\Pi \gg 1$) otteniamo

$$\ell \simeq v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$\square$

2 Moto su una spirale

Consideriamo una traiettoria descritta in coordinate polari da

$$r(\theta) = r_0 + \frac{b}{2\pi}\theta$$

dove r_0 e b sono costanti positive date. Si tratta dell'equazione di una spirale.

Esercizio 4 (Spirale percorsa a velocità angolare costante)**.** Studiare il moto nel caso che $\dot{\theta} = \omega =$ costante, con $\omega > 0$. Determinare in particolare la velocità, l'accelerazione e il raggio di curvatura della traiettoria. Anzitutto se $\dot{\theta} = \omega$ avremo

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 + \omega t\\ r &= r_0 + \frac{b}{2\pi}\left(\theta_0 + \omega t\right)\end{aligned}$$

ed inoltre $\theta_0 = 0$ se interpretiamo r_0 come raggio all'istante iniziale. Quindi

$$\dot{r} \equiv v_r = \frac{b\omega}{2\pi}$$

che ci dice che la velocità radiale è costante. L'espressione della velocità in coordinate polari è quindi

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta = v_r\hat{e}_r + r\omega\hat{e}_\theta$$

Il modulo della velocità sarà

$$v = \sqrt{v_r^2 + r^2\omega^2} = \sqrt{v_r^2 + \omega^2\left(r_0 + \frac{b\omega t}{2\pi}\right)^2} = \sqrt{v_r^2 + \omega^2\left(r_0 + v_r t\right)^2}$$

Dato che la velocità è tangente alla traiettoria, possiamo determinare facilmente il versore tangente

$$\hat{\tau} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{v_r\hat{e}_r + r\omega\hat{e}_\theta}{\sqrt{v_r^2 + r^2\omega^2}} = \frac{\hat{e}_r + \frac{2\pi r}{b}\hat{e}_\theta}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi r}{b}\right)^2}}$$

che come deve essere non dipende dalla specifica legge oraria. Da notare che questo non coincide con $\hat{e}_\theta$, però

$$\lim_{t\to\infty} \hat{\tau} = \hat{e}_\theta$$

perchè $\lim_{t\to\infty} r = +\infty$. Possiamo costruire esplicitamente un versore normale alla traiettoria, scrivendo

$$\hat{n} = \frac{-\hat{e}_\theta + \frac{2\pi r}{b}\hat{e}_r}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi r}{b}\right)^2}}$$

che non coincide con il versore radiale, se non per tempi molto grandi,

$$\lim_{t\to\infty} \hat{n} = \hat{e}_r$$

Si verifica direttamente che $\hat{n} \cdot \hat{n} = \hat{\tau} \cdot \hat{\tau} = 1$ e che $\hat{n} \cdot \hat{\tau} = 0$.

Per quanto riguarda l'accelerazione abbiamo

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(2\dot{\theta}\dot{r} + r\ddot{\theta}\right)\hat{e}_\theta$$

che nel nosto caso si riduce a

$$\vec{a} = -r\omega^2\hat{e}_r + 2\omega v_r\hat{e}_\theta$$

dato che $\ddot{r} = 0$ e $\ddot{\theta} = 0$. La componente tangenziale della accelerazione si trova prendendo il prodotto scalare con $\hat{\tau}$:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\hat{\tau} &= \left[-r\omega^2\hat{e}_r + 2\omega v_r\hat{e}_\theta\right]\cdot\frac{\hat{e}_r + \frac{2\pi r}{b}\hat{e}_\theta}{\sqrt{1+\left(\frac{2\pi r}{b}\right)^2}}\\ &= \frac{\omega^2 r v_r}{\sqrt{v_r^2 + r^2\omega^2}}\end{aligned}$$

che è uguale alla derivata temporale del modulo della velocità, come deve essere. La componente radiale si trova analogamente prendendo il prodotto scalare con $\hat{n}$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\hat{n} &= \left[-r\omega^2\hat{e}_r + 2\omega v_r\hat{e}_\theta\right]\cdot\frac{-\hat{e}_\theta + \frac{2\pi r}{b}\hat{e}_r}{\sqrt{1+\left(\frac{2\pi r}{b}\right)^2}}\\ &= \frac{-r^2\omega^3 - 2\omega v_r^2}{\sqrt{v_r^2 + r^2\omega^2}}\end{aligned}$$

che però deve essere uguale a v^2/ρ. Possiamo quindi determinare il raggio di curvatura:

$$-\frac{v^2}{\rho} = -\frac{v_r^2 + r^2\omega^2}{\rho} = \frac{-r^2\omega^3 - 2\omega v_r^2}{\sqrt{v_r^2 + r^2\omega^2}}$$

da cui

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2\omega v_r^2 - r^2\omega^2}{\left(v_r^2 + r^2\omega^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{r}\frac{1+\frac{2v_r^2}{\omega^2 r^2}}{\left(1+\frac{v_r^2}{\omega^2 r^2}\right)^{3/2}}$$

Notare che $\rho \neq r$, ma che $\lim_{t\to\infty}\rho = r$. $\square$

Nell'esercizio precedente il raggio di curvatura è stato determinato a partire dalla legge oraria. Consideriamo adesso un modo diverso di percorrere la stessa spirale.

Esercizio 5 (Spirale percorsa con velocità azimutale costante.). Studiare il moto sulla spirale definita precedentemente nel caso $r\dot{\theta} = v_\theta =$ costante. Determinare in particolare la velocità, l'accelerazione e il raggio di curvatura della traiettoria.

In questo caso dato che $r\dot{\theta} = v_\theta$ abbiamo, derivando rispetto al tempo l'equazione della traiettoria,

$$\dot{r} = \frac{b}{2\pi}\dot{\theta} = \frac{b}{2\pi}\frac{v_\theta}{r}$$

Troviamo quindi

$$r\dot{r} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}r^2 = \frac{bv_\theta}{2\pi}$$

e quindi

$$r = \sqrt{r_0^2 + \frac{bv_\theta}{\pi}t}$$

cioè la velocità radiale cresce a grandi tempi ($t \gg \frac{r_0^2}{bv_\theta}$) proporzionalmente a $t^{1/2}$. Per quanto riguarda la velocità angolare otteniamo

$$\dot{\theta} = \frac{v_\theta}{\sqrt{r_0^2 + \frac{bv_\theta}{\pi}t}}$$

che tende a zero a grandi tempi. Possiamo scrivere la velocità nella forma

$$\vec{v} = \frac{b}{2\pi}\frac{v_\theta}{r}\hat{e}_r + v_\theta\hat{e}_\theta$$

ed il suo modulo come

$$v = \sqrt{v_\theta^2 + \left(\frac{bv_\theta}{2\pi r}\right)^2}$$

Notare che per grandi tempi $v \simeq v_\theta$. I versori tangenti e normali alla traiettoria sono identici a quelli dell'esercizio precedente. L'accelerazione si scrive

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{e}_\theta \\ &= -\frac{v_\theta^2}{r}\left[1 + \left(\frac{b}{2\pi r}\right)^2\right]\hat{e}_r + \frac{bv_\theta^2}{2\pi r^2}\hat{e}_\theta\end{aligned}$$

Consideriamo ancora la componente tangenziale. Abbiamo

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\hat{\tau} &= \left\{-\frac{v_\theta^2}{r}\left[1 + \left(\frac{b}{2\pi r}\right)^2\right]\hat{e}_r + \frac{bv_\theta^2}{2\pi r^2}\hat{e}_\theta\right\}\cdot\frac{\hat{e}_r + \frac{2\pi r}{b}\hat{e}_\theta}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi r}{b}\right)^2}} \\ &= -\frac{v_\theta^2}{r}\frac{\left(\frac{b}{2\pi r}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{2\pi r}\right)^2}}\end{aligned}$$

Per quella normale invece

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\hat{\tau} &= \left\{-\frac{v_\theta^2}{r}\left[1 + \left(\frac{b}{2\pi r}\right)^2\right]\hat{e}_r + \frac{bv_\theta^2}{2\pi r^2}\hat{e}_\theta\right\}\cdot\frac{-\hat{e}_\theta + \frac{2\pi r}{b}\hat{e}_r}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi r}{b}\right)^2}} \\ &= -\frac{v_\theta^2}{r}\frac{\left(1 + \frac{b^2}{2\pi^2 r^2}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{2\pi r}\right)^2}}\end{aligned}$$

Calcoliamo infine il raggio di curvatura, usando lo stesso metodo impiegato nell'esercizio precedente. Abbiamo

$$-\frac{v^2}{\rho} = -\frac{v_\theta^2}{\rho}\left[1 + \left(\frac{b}{2\pi r}\right)^2\right] = -\frac{v_\theta^2}{r}\frac{\left(1 + \frac{b^2}{2\pi^2 r^2}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{2\pi r}\right)^2}}$$

da cui

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}\frac{\left(1 + \frac{b^2}{2\pi^2 r^2}\right)}{\left[1 + \left(\frac{b}{2\pi r}\right)^2\right]^{3/2}}$$

La formula coincide con quella trovata precedentemente, come deve essere, dato che il raggio di curvatura è una caratteristica geometrica della traiettoria, indipendente da come questa viene percorsa. □

Può essere utile verificare l'indipendenza del raggio di curvatura dalla legge oraria nel caso generale. Consideriamo un moto nel piano descritto in coordinate cartesiane dalle leggi orarie

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y$$

La velocità sarà

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y$$

e il versori normali e tangenti saranno dati da

$$\begin{aligned}\hat{\tau} &= \frac{\dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y}{v} \\ \hat{n} &= \frac{-\dot{y}\hat{e}_x + \dot{x}\hat{e}_y}{v}\end{aligned}$$

con $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. L'accelerazione sarà

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{e}_x + \ddot{y}\hat{e}_y$$

e la componente normale

$$\vec{a} \cdot \hat{n} = -\ddot{x}\dot{y} + \ddot{y}\dot{x}$$

Sostituendo nella relazione

$$-\frac{v^2}{\rho} = \vec{a} \cdot \hat{n}$$

troviamo

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}} \tag{2.1}$$

Supponiamo adesso di parametrizzare il moto non con il tempo, ma con qualche altro parametro $\lambda(t)$. Chiaramente

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{dx}{d\lambda}\dot{\lambda} \\ \dot{y} &= \frac{dy}{d\lambda}\dot{\lambda}\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{d^2x}{d\lambda^2}\dot{\lambda}^2 + \frac{dx}{d\lambda}\ddot{\lambda} \\
\ddot{y} &= \frac{d^2y}{d\lambda^2}\dot{\lambda}^2 + \frac{dy}{d\lambda}\ddot{\lambda}
\end{aligned}
$$

Sostituendo nell'equazione (2.1) otteniamo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} &= \frac{\left(\frac{d^2x}{d\lambda^2}\dot{\lambda}^2 + \frac{dx}{d\lambda}\ddot{\lambda}\right)\frac{dy}{d\lambda}\dot{\lambda} - \left(\frac{d^2y}{d\lambda^2}\dot{\lambda}^2 + \frac{dy}{d\lambda}\ddot{\lambda}\right)\frac{dx}{d\lambda}\dot{\lambda}}{\left[\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2\dot{\lambda}^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2\dot{\lambda}^2\right]^{3/2}} \\
&= \frac{\frac{d^2x}{d\lambda^2}\dot{\lambda}^2\frac{dy}{d\lambda}\dot{\lambda} + \frac{dx}{d\lambda}\ddot{\lambda}\frac{dy}{d\lambda}\dot{\lambda} - \frac{d^2y}{d\lambda^2}\dot{\lambda}^2\frac{dx}{d\lambda}\dot{\lambda} - \frac{dy}{d\lambda}\ddot{\lambda}\frac{dx}{d\lambda}\dot{\lambda}}{\dot{\lambda}^3\left[\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2\right]^{3/2}} \\
&= \frac{\frac{d^2x}{d\lambda^2}\frac{dy}{d\lambda} - \frac{d^2y}{d\lambda^2}\frac{dx}{d\lambda}}{\left[\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2\right]^{3/2}}
\end{aligned}
$$

Questa espressione è identica alla (2.1), salvo che le derivate rispetto al tempo sono state sostituite con quelle rispetto al nuovo parametro λ. Segue che ρ non dipende dalla parametrizzazione scelta. In particolare si può scegliere almeno localmente $\lambda = x$ e ottenere

$$
\frac{1}{\rho} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{2.2}
$$

utile per calcolare il raggio di curvatura di un traiettoria espressa nella forma $y = y(x)$.

Esercizio 6 (Raggio di curvatura della parabola)**.** Calcolare il raggio di curvatura della traiettoria (1.10). Da

$$
y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}x^2 \tag{2.3}
$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{v_{0x}^2}x \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{g}{v_{0x}^2}\end{aligned}$$

Utilizzando la (2.2) troviamo

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{g}{v_{0x}^2}}{\left[1 + \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{v_{0x}^2}x\right)^2\right]^{3/2}}$$

Il raggio di curvatura minimo si ha quando il denominatore è minimo, cioè al vertice. In quel caso

$$\rho_{min} = \frac{v_{0x}^2}{g}$$

□

Esercizio 7 (Raggio di curvatura in coordinate polari.)**.** Trovare una espressione per il raggio di curvatura di una traiettoria espressa in coordinate polari.

In questo caso abbiamo

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r\hat{e}_r \\ \vec{v} &= \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \\ \vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{e}_\theta\end{aligned}$$

e i versori normali e tangenti alla traiettoria saranno

$$\begin{aligned}\hat{\tau} &= \frac{\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta}{v} \\ \hat{n} &= \frac{r\dot{\theta}\hat{e}_r - \dot{r}\hat{e}_\theta}{v}\end{aligned}$$

Sostituendo in

$$\vec{a} \cdot \hat{n} = -\frac{v^2}{\rho}$$

troviamo

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r^2\dot{\theta}^3 + 2\dot{r}^2\dot{\theta} + r\dot{r}\ddot{\theta} - \ddot{r}r\dot{\theta}}{\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)^{3/2}}$$

Dato che l'espressione è invariante per riparametrizzazione, possiamo scegliere $\lambda = \theta$ e abbiamo

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right]^{3/2}}$$

Per verifica applichiamo questa formula alla spirale considerata precedentemente. Otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{d\theta} &= \frac{b}{2\pi} \\
\frac{d^2r}{d\theta^2} &= 0
\end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}\frac{1 + 2\left(\frac{b}{2\pi r}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{b}{2\pi r}\right)^2\right]^{3/2}}$$

in accordo con i risultati precedenti. □