

Esercitazioni di Fisica 1

Ultima versione: 21 gennaio 2014

Moto in due dimensioni, in coordinate cartesiane e polari.

1 Moto parabolico

Analizziamo un semplice moto uniformemente accelerato in due dimensioni, definito dalla legge oraria

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \quad (1.1)$$

Per concretezza siamo interessati al caso in cui \vec{a} è l'accelerazione di gravità. Scegliamo un sistema di riferimento nel quale

$$\vec{a} = -g \hat{e}_y \quad (1.2)$$

Possiamo inoltre scrivere

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x \hat{e}_x + y \hat{e}_y \\ \vec{r}_0 &= \vec{0} \\ \vec{v}_0 &= v_{0x} \hat{e}_x + v_{0y} \hat{e}_y \end{aligned} \quad (1.3)$$

e ottenere le leggi orarie

$$x = v_{0x} t \quad (1.4)$$

$$y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1.5)$$

Esercizio 1. Derivare le relazioni (1.4) e (1.5) dalle definizioni precedenti.

Facendo il prodotto scalare di ambo i membri della (1.1) con \hat{e}_x otteniamo

$$\vec{r} \cdot \hat{e}_x = \vec{r}_0 \cdot \hat{e}_x + \vec{v}_0 \cdot \hat{e}_x t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot \hat{e}_x t^2 \quad (1.6)$$

ma dalle definizioni (1.2) e (1.3) segue che $\vec{r}_0 \cdot \hat{e}_x = 0$, $\vec{r} \cdot \hat{e}_x = x$, $\vec{v}_0 \cdot \hat{e}_x = v_{0x}$ e $\vec{a} \cdot \hat{e}_x = 0$, quindi otteniamo l'Equazione (1.4). Analogamente prendendo il prodotto scalare con \hat{e}_y abbiamo

$$\vec{r} \cdot \hat{e}_y = \vec{r}_0 \cdot \hat{e}_y + \vec{v}_0 \cdot \hat{e}_y t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot \hat{e}_y t^2 \quad (1.7)$$

e usando $\vec{r}_0 \cdot \hat{e}_y = 0$, $\vec{r} \cdot \hat{e}_y = y$, $\vec{v}_0 \cdot \hat{e}_y = v_{0y}$ e $\vec{a} \cdot \hat{e}_y = -g$ otteniamo l'Equazione (1.5).

Le leggi orarie danno una descrizione completa del moto. In particolare possiamo ottenere le componenti della velocità. In notazione vettoriale abbiamo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

e quindi (usando la relazione precedente oppure derivando le (1.4) e (1.5))

$$\dot{x} = v_{0x} \quad (1.8)$$

$$\dot{y} = v_{0y} - gt \quad (1.9)$$

Analogamente possiamo ottenere l'accelerazione

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = -g$$

□

In certi casi può essere utile avere a disposizione una relazione diretta tra coordinata x e coordinata y che esprima la traiettoria. Questo si può ottenere facilmente eliminando il tempo dalle leggi orarie. Abbiamo

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2}x^2 \quad (1.10)$$

Esercizio 2. Derivare l'equazione precedente

Dalla (1.4) otteniamo

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

e sostituendo nella (1.5) troviamo

$$y = v_{0y} \left(\frac{x}{v_{0x}} \right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_{0x}} \right)^2$$

cioè la (1.10).

□

Esercizio 3 (Lancio del peso). Considerare la traiettoria di un peso lanciato da un'altezza h con velocità iniziale v_0 inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo α . Determinare α in modo che la gittata sia massima.

Scriviamo le leggi orarie. Abbiamo

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t$$

$$y(t) = h + v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$

Il peso arriverà al suolo quando $y = 0$, cioè al tempo τ determinato da

$$y(\tau) = h + v_0 \sin \alpha \tau - \frac{1}{2} g \tau^2 = 0$$

Risolvendo l'equazione troviamo

$$\tau = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

e tra le due soluzioni quella accettabile è la positiva. Calcolando $x(\tau)$ troviamo la gittata ℓ

$$\ell = x(\tau) = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} + \cos \alpha \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 \sin^2 \alpha + \frac{2hv_0^2}{g}} \quad (1.11)$$

Troviamo il massimo di ℓ rispetto ad α . Derivando abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d\ell}{d\alpha} &= \frac{v_0^2}{g} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \sin \alpha \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 \sin^2 \alpha + \frac{2hv_0^2}{g}} \\ &\quad + \frac{\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 \sin^2 \alpha + \frac{2hv_0^2}{g}}} \sin \alpha \cos^2 \alpha = 0 \end{aligned}$$

e moltiplicando per il denominatore dell'ultimo termine

$$(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{2hg}{v_0^2}} = \sin \alpha \left(\sin^2 \alpha + \frac{2hg}{v_0^2} - \cos^2 \alpha \right)$$

Eleviamo al quadrato ambo i membri

$$(1 - 2\sin^2 \alpha)^2 \left(\sin^2 \alpha + \frac{2hg}{v_0^2} \right) = \sin^2 \alpha \left(2\sin^2 \alpha + \frac{2hg}{v_0^2} - 1 \right)^2$$

e semplificando otteniamo

$$1 - \left(2 + \frac{2hg}{v_0^2} \right) \sin^2 \alpha = 0$$

da cui, ponendo $\Pi = hg/v_0$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \Pi}$$

Per $h = 0$ questo si riduce a $\sin^2 \alpha = 1/2$, cioè $\alpha = \pi/4$, come deve essere. Per $h \gg v_0^2/g$ $\sin^2 \alpha = 0$, quindi conviene lanciare il proiettile in orizzontale. Calcoliamo adesso la gittata massima. Riscriviamo la (1.11) nella forma

$$\ell = \frac{v_0^2}{g} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \left[\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + 2\Pi} \right]$$

e sostituendo il valore di $\sin \alpha$ precedentemente determinato troviamo

$$\ell = \frac{v_0^2}{g} \sqrt{1 + 2\Pi} = \frac{v_0^2}{g} \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}$$

Per $h = 0$ ($\Pi = 0$) abbiamo $\ell = v_0^2/g$. Per $g \gg v_0^2/g$ ($\Pi \gg 1$) otteniamo

$$\ell \simeq v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

□

2 Moto su una spirale

Consideriamo una traiettoria descritta in coordinate polari da

$$r(\theta) = r_0 + \frac{b}{2\pi} \theta$$

dove r_0 e b sono costanti positive date. Si tratta dell'equazione di una spirale.

Esercizio 4 (Spirale percorsa a velocità angolare costante). Studiare il moto nel caso che $\dot{\theta} = \omega = \text{costante}$, con $\omega > 0$. Determinare in particolare la velocità, l'accelerazione e il raggio di curvatura della traiettoria. Anzitutto se $\dot{\theta} = \omega$ avremo

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \omega t \\ r &= r_0 + \frac{b}{2\pi} (\theta_0 + \omega t) \end{aligned}$$

ed inoltre $\theta_0 = 0$ se interpretiamo r_0 come raggio all'istante iniziale. Quindi

$$\dot{r} \equiv v_r = \frac{b\omega}{2\pi}$$

che ci dice che la velocità radiale è costante. L'espressione della velocità in coordinate polari è quindi

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta = v_r\hat{e}_r + r\omega\hat{e}_\theta$$

Il modulo della velocità sarà

$$v = \sqrt{v_r^2 + r^2\omega^2} = \sqrt{v_r^2 + \omega^2 \left(r_0 + \frac{b\omega t}{2\pi} \right)^2} = \sqrt{v_r^2 + \omega^2 (r_0 + v_r t)^2}$$

Dato che la velocità è tangente alla traiettoria, possiamo determinare facilmente il versore tangente

$$\hat{\tau} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{v_r\hat{e}_r + r\omega\hat{e}_\theta}{\sqrt{v_r^2 + r^2\omega^2}} = \frac{\hat{e}_r + \frac{2\pi r}{b}\hat{e}_\theta}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi r}{b}\right)^2}}$$

che come deve essere non dipende dalla specifica legge oraria. Da notare che questo non coincide con \hat{e}_θ , però

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\tau} = \hat{e}_\theta$$

perchè $\lim_{t \rightarrow \infty} r = +\infty$. Possiamo costruire esplicitamente un versore normale alla traiettoria, scrivendo

$$\hat{n} = \frac{-\hat{e}_\theta + \frac{2\pi r}{b} \hat{e}_r}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi r}{b}\right)^2}}$$

che non coincide con il versore radiale, se non per tempi molto grandi,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{n} = \hat{e}_r$$

Si verifica direttamente che $\hat{n} \cdot \hat{n} = \hat{\tau} \cdot \hat{\tau} = 1$ e che $\hat{n} \cdot \hat{\tau} = 0$.

Per quanto riguarda l'accelerazione abbiamo

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \hat{e}_r + \left(2\dot{\theta}\dot{r} + r\ddot{\theta}\right) \hat{e}_\theta$$

che nel nostro caso si riduce a

$$\vec{a} = -r\omega^2 \hat{e}_r + 2\omega v_r \hat{e}_\theta$$

dato che $\ddot{r} = 0$ e $\ddot{\theta} = 0$. La componente tangenziale della accelerazione si trova prendendo il prodotto scalare con $\hat{\tau}$:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \hat{\tau} &= \left[-r\omega^2 \hat{e}_r + 2\omega v_r \hat{e}_\theta\right] \cdot \frac{\hat{e}_r + \frac{2\pi r}{b} \hat{e}_\theta}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi r}{b}\right)^2}} \\ &= \frac{\omega^2 r v_r}{\sqrt{v_r^2 + r^2 \omega^2}} \end{aligned}$$

che è uguale alla derivata temporale del modulo della velocità, come deve essere. La componente radiale si trova analogamente prendendo il prodotto scalare con \hat{n}

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \hat{n} &= \left[-r\omega^2 \hat{e}_r + 2\omega v_r \hat{e}_\theta\right] \cdot \frac{-\hat{e}_\theta + \frac{2\pi r}{b} \hat{e}_r}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi r}{b}\right)^2}} \\ &= \frac{-r^2 \omega^3 - 2\omega v_r^2}{\sqrt{v_r^2 + r^2 \omega^2}} \end{aligned}$$

che però deve essere uguale a v^2/ρ . Possiamo quindi determinare il raggio di curvatura:

$$-\frac{v^2}{\rho} = -\frac{v_r^2 + r^2 \omega^2}{\rho} = \frac{-r^2 \omega^3 - 2\omega v_r^2}{\sqrt{v_r^2 + r^2 \omega^2}}$$

da cui

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2\omega v_r^2 - r^2 \omega^2}{(v_r^2 + r^2 \omega^2)^{3/2}} = \frac{1}{r} \frac{1 + \frac{2v_r^2}{\omega^2 r^2}}{\left(1 + \frac{v_r^2}{\omega^2 r^2}\right)^{3/2}}$$

Notare che $\rho \neq r$, ma che $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = r$. □

Nell'esercizio precedente il raggio di curvatura è stato determinato a partire dalla legge oraria. Consideriamo adesso un modo diverso di percorrere la stessa spirale.

Esercizio 5 (Spirale percorsa con velocità azimutale costante.). Studiare il moto sulla spirale definita precedentemente nel caso $r\dot{\theta} = v_\theta = \text{costante}$. Determinare in particolare la velocità, l'accelerazione e il raggio di curvatura della traiettoria.

In questo caso dato che $r\dot{\theta} = v_\theta$ abbiamo, derivando rispetto al tempo l'equazione della traiettoria,

$$\dot{r} = \frac{b}{2\pi} \dot{\theta} = \frac{b}{2\pi} \frac{v_\theta}{r}$$

Troviamo quindi

$$r\dot{r} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} r^2 = \frac{bv_\theta}{2\pi}$$

e quindi

$$r = \sqrt{r_0^2 + \frac{bv_\theta}{\pi} t}$$

cioè la velocità radiale cresce a grandi tempi ($t \gg \frac{r_0^2}{bv_\theta}$) proporzionalmente a $t^{1/2}$. Per quanto riguarda la velocità angolare otteniamo

$$\dot{\theta} = \frac{v_\theta}{\sqrt{r_0^2 + \frac{bv_\theta}{\pi} t}}$$

che tende a zero a grandi tempi. Possiamo scrivere la velocità nella forma

$$\vec{v} = \frac{b}{2\pi} \frac{v_\theta}{r} \hat{e}_r + v_\theta \hat{e}_\theta$$

ed il suo modulo come

$$v = \sqrt{v_\theta^2 + \left(\frac{bv_\theta}{2\pi r}\right)^2}$$

Notare che per grandi tempi $v \simeq v_\theta$. I versori tangenti e normali alla traiettoria sono identici a quelli dell'esercizio precedente. L'accelerazione si scrive

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \hat{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) \hat{e}_\theta \\ &= -\frac{v_\theta^2}{r} \left[1 + \left(\frac{b}{2\pi r}\right)^2\right] \hat{e}_r + \frac{bv_\theta^2}{2\pi r^2} \hat{e}_\theta \end{aligned}$$

Consideriamo ancora la componente tangenziale. Abbiamo

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \hat{\tau} &= \left\{ -\frac{v_\theta^2}{r} \left[1 + \left(\frac{b}{2\pi r}\right)^2\right] \hat{e}_r + \frac{bv_\theta^2}{2\pi r^2} \hat{e}_\theta \right\} \cdot \frac{\hat{e}_r + \frac{2\pi r}{b} \hat{e}_\theta}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi r}{b}\right)^2}} \\ &= -\frac{v_\theta^2}{r} \frac{\left(\frac{b}{2\pi r}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{2\pi r}\right)^2}} \end{aligned}$$

Per quella normale invece

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \hat{\tau} &= \left\{ -\frac{v_\theta^2}{r} \left[1 + \left(\frac{b}{2\pi r} \right)^2 \right] \hat{e}_r + \frac{bv_\theta^2}{2\pi r^2} \hat{e}_\theta \right\} \cdot \frac{-\hat{e}_\theta + \frac{2\pi r}{b} \hat{e}_r}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi r}{b} \right)^2}} \\ &= -\frac{v_\theta^2}{r} \frac{\left(1 + \frac{b^2}{2\pi^2 r^2} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{2\pi r} \right)^2}}\end{aligned}$$

Calcoliamo infine il raggio di curvatura, usando lo stesso metodo impiegato nell'esercizio precedente. Abbiamo

$$-\frac{v^2}{\rho} = -\frac{v_\theta^2}{\rho} \left[1 + \left(\frac{b}{2\pi r} \right)^2 \right] = -\frac{v_\theta^2}{r} \frac{\left(1 + \frac{b^2}{2\pi^2 r^2} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{2\pi r} \right)^2}}$$

da cui

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} \frac{\left(1 + \frac{b^2}{2\pi^2 r^2} \right)}{\left[1 + \left(\frac{b}{2\pi r} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

La formula coincide con quella trovata precedentemente, come deve essere, dato che il raggio di curvatura è una caratteristica geometrica della traiettoria, indipendente da come questa viene percorsa. \square

Può essere utile verificare l'indipendenza del raggio di curvatura dalla legge oraria nel caso generale. Consideriamo un moto nel piano descritto in coordinate cartesiane dalle leggi orarie

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y$$

La velocità sarà

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y$$

e il versori normali e tangenti saranno dati da

$$\begin{aligned}\hat{\tau} &= \frac{\dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y}{v} \\ \hat{n} &= \frac{-\dot{y}\hat{e}_x + \dot{x}\hat{e}_y}{v}\end{aligned}$$

con $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. L'accelerazione sarà

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{e}_x + \ddot{y}\hat{e}_y$$

e la componente normale

$$\vec{a} \cdot \hat{n} = -\ddot{x}\dot{y} + \dot{x}\ddot{y}$$

Sostituendo nella relazione

$$-\frac{v^2}{\rho} = \vec{a} \cdot \hat{n}$$

troviamo

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \quad (2.1)$$

Supponiamo adesso di parametrizzare il moto non con il tempo, ma con qualche altro parametro $\lambda(t)$. Chiaramente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{d\lambda} \dot{\lambda} \\ \dot{y} &= \frac{dy}{d\lambda} \dot{\lambda} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{d^2x}{d\lambda^2} \dot{\lambda}^2 + \frac{dx}{d\lambda} \ddot{\lambda} \\ \ddot{y} &= \frac{d^2y}{d\lambda^2} \dot{\lambda}^2 + \frac{dy}{d\lambda} \ddot{\lambda} \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione (2.1) otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{\left(\frac{d^2x}{d\lambda^2} \dot{\lambda}^2 + \frac{dx}{d\lambda} \ddot{\lambda}\right) \frac{dy}{d\lambda} \dot{\lambda} - \left(\frac{d^2y}{d\lambda^2} \dot{\lambda}^2 + \frac{dy}{d\lambda} \ddot{\lambda}\right) \frac{dx}{d\lambda} \dot{\lambda}}{\left[\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 \dot{\lambda}^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 \dot{\lambda}^2\right]^{3/2}} \\ &= \frac{\frac{d^2x}{d\lambda^2} \dot{\lambda}^2 \frac{dy}{d\lambda} \dot{\lambda} + \frac{dx}{d\lambda} \ddot{\lambda} \frac{dy}{d\lambda} \dot{\lambda} - \frac{d^2y}{d\lambda^2} \dot{\lambda}^2 \frac{dx}{d\lambda} \dot{\lambda} - \frac{dy}{d\lambda} \ddot{\lambda} \frac{dx}{d\lambda} \dot{\lambda}}{\dot{\lambda}^3 \left[\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2\right]^{3/2}} \\ &= \frac{\frac{d^2x}{d\lambda^2} \frac{dy}{d\lambda} - \frac{d^2y}{d\lambda^2} \frac{dx}{d\lambda}}{\left[\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2\right]^{3/2}} \end{aligned}$$

Questa espressione è identica alla (2.1), salvo che le derivate rispetto al tempo sono state sostituite con quelle rispetto al nuovo parametro λ . Segue che ρ non dipende dalla parametrizzazione scelta. In particolare si può scegliere almeno localmente $\lambda = x$ e ottenere

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (2.2)$$

utile per calcolare il raggio di curvatura di una traiettoria espressa nella forma $y = y(x)$.

Esercizio 6 (Raggio di curvatura della parabola). Calcolare il raggio di curvatura della traiettoria (1.10). Da

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} x^2 \quad (2.3)$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{v_{0x}^2}x \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{g}{v_{0x}^2}\end{aligned}$$

Utilizzando la (2.2) troviamo

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{g}{v_{0x}^2}}{\left[1 + \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{v_{0x}^2}x\right)^2\right]^{3/2}}$$

Il raggio di curvatura minimo si ha quando il denominatore è minimo, cioè al vertice. In quel caso

$$\rho_{min} = \frac{v_{0x}^2}{g}$$

□

Esercizio 7 (Raggio di curvatura in coordinate polari.). Trovare una espressione per il raggio di curvatura di una traiettoria espressa in coordinate polari.

In questo caso abbiamo

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r\hat{e}_r \\ \vec{v} &= \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{e}_\theta\end{aligned}$$

e i versori normali e tangenti alla traiettoria saranno

$$\begin{aligned}\hat{t} &= \frac{\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta}{v} \\ \hat{n} &= \frac{r\dot{\theta}\hat{e}_r - \dot{r}\hat{e}_\theta}{v}\end{aligned}$$

Sostituendo in

$$\vec{a} \cdot \hat{n} = -\frac{v^2}{\rho}$$

troviamo

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r^2\dot{\theta}^3 + 2\dot{r}^2\dot{\theta} + r\dot{r}\ddot{\theta} - \ddot{r}r\dot{\theta}}{\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)^{3/2}}$$

Dato che l'espressione è invariante per riparametrizzazione, possiamo scegliere $\lambda = \theta$ e abbiamo

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right]^{3/2}}$$

Per verifica applichiamo questa formula alla spirale considerata precedentemente. Otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \frac{b}{2\pi} \\ \frac{d^2r}{d\theta^2} &= 0\end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} \frac{1 + 2 \left(\frac{b}{2\pi r}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{b}{2\pi r}\right)^2\right]^{3/2}}$$

in accordo con i risultati precedenti.

□