Esercitazioni di Fisica 1

Ultima versione: 21 gennaio 2014

Paracadutista (attrito viscoso). Filo con massa che pende da un tavolo.

1 Studio del moto di un paracadutista

Vogliamo studiare il moto di un paracadutista, utilizzando un modello semplificato. In particolare, immagineremo che l'effetto del paracadute possa essere rappresentato da una forza di attrito viscoso della forma

$$\vec{F} = -\lambda\vec{v}$$

dove $\vec{v}$ è la velocità del paracadutista e λ una costante positiva che tiene conto delle caratteristiche del mezzo e della forma del paracadute. Va sottolineato che si tratta di un modello molto semplificato, valido solo per velocità sufficientemente "piccole", cioè se

$$v \ll \frac{\nu}{L}$$

dove L è una dimensione caratteristica del sistema e ν una costante di opportune dimensioni (detta viscosità cinematica) che caratterizza il mezzo. Per l'aria a temperatura ambiente ad esempio

$$\nu \simeq 15 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2 s^{-1}}$$

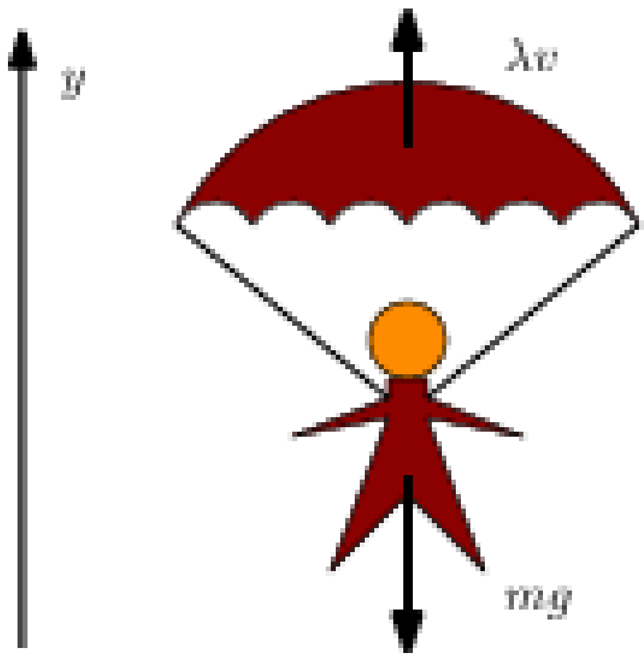

Figura 1.1: Le forze che agiscono su un paracadutista in moto verticale.

e quindi, prendendo $L \simeq 1\,\mathrm{m}$ vediamo che deve essere

$$v \ll 1.5 \times 10^{-5}\,\mathrm{m\ s}^{-1}$$

che è sicuramente non verificata per un paracadutista. In un modello più realistico la forza è proporzionale al quadrato della velocità.

Ad ogni modo, scrivendo l'equazione del moto $\vec{F} = m\vec{a}$ per un moto verticale (vedere Figura 1.1) troviamo

$$ma_y = -mg - \lambda v_y \tag{1.1}$$

Per iniziare a comprendere il significato dell'Equazione (1.1) riscriviamola nella forma

$$a_y = -g - \frac{\lambda}{m} v_y \tag{1.2}$$

e rappresentiamola nel piano avente per ascissa v_y e per ordinata a_y. Si tratta ovviamente di una relazione lineare, e il relativo grafico è in Figura (1.2). Possiamo estrarre delle informazioni utili facendo le seguenti considerazioni:

- se conosciamo la velocità del paracadutista ad un istante dato (ad esempio all'istante iniziale) il grafico ci permette di calcolare la accelerazione;
- se l'accelerazione è positiva la velocità successivamente aumenterà, diminuirà in caso contrario. Questo significa che se ad una data velocità ci troviamo sulla semiretta che giace nel semipiano $a_y > 0$, successivamente ci sposteremo su di essa verso destra. Se invece ci troviamo sulla semiretta che giace nel semipiano $a_y < 0$ successivamente ci sposteremo verso sinistra.

Indipendentemente dalla velocità iniziale vediamo che le velocità convergeranno verso il valore corrispondente all'intersezione della retta con l'asse $a_y = 0$, cioè

$$v \equiv v_L = -\frac{mg}{\lambda}$$

ed in particolare se inizialmente $v_y = v_L$ sarà $a_y = 0$, quindi tale velocità rimarrà costante.

Dal grafico che abbiamo costruito non possiamo però capire se la velocità convergerà alla velocità limite in un tempo finito. Proviamo allora a considerare il piano con ascissa t e ordinata v_y, come in Figura (1.3). Su di esso vorremmo cercare di rappresentare $v_y(t)$.

Supponiamo di conoscere la velocità v_y a un dato tempo t^*, $v_y(t^*)$. Possiamo dire con sicurezza che la curva $v_y(t)$ passerà dal punto $t = t^*$, $v_y = v_y(t^*)$. Ma se scriviamo l'Equazione (1.2) nella forma

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{\lambda}{m} v_y \tag{1.3}$$

vediamo che in realtà conosciamo anche la pendenza della curva in quel punto. In altre parole abbiamo la situazione rappresentata in Figura 1.3. Chiaramente la pendenza è negativa se $v_y > v_L$, positiva se $v_y < v_L$ e nulla se $v_y = v_L$.

La legge $v_y(t)$ cercata corrisponderà a una curva che in ogni punto ha la giusta pendenza: nella Figura (1.4) sono rappresentate alcune di esse: è chiaro che per definire completamente quella che ci interessa dovremo dare altre informazioni, ad esempio il valore iniziale di v_y.

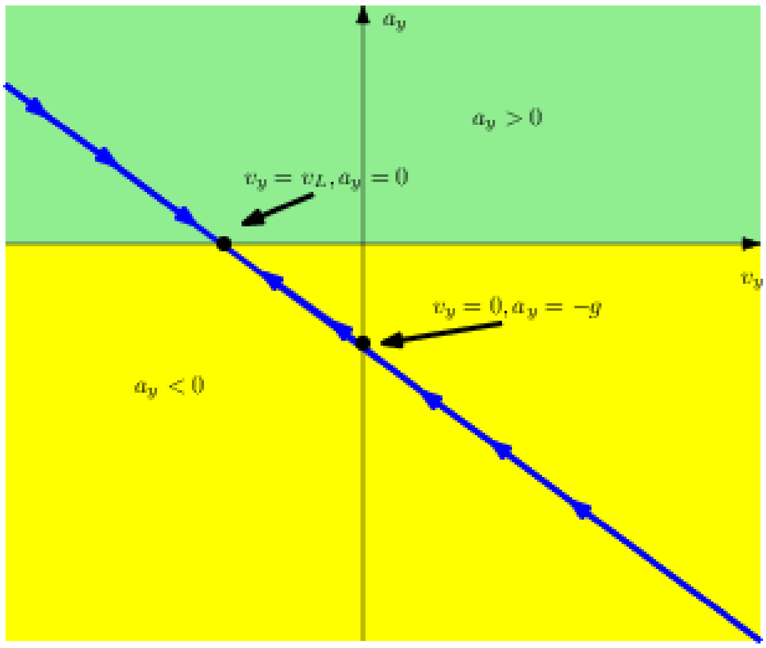

Figura 1.2: L'accelerazione verticale a_y in funzione della velocità verticale v_y. Nel semipiano superiore (in verde) l'accelerazione è positiva, quindi la velocità deve aumentare. Nel semipiano inferiore (in giallo) l'accelerazione è negativa, quindi la velocità deve diminuire.

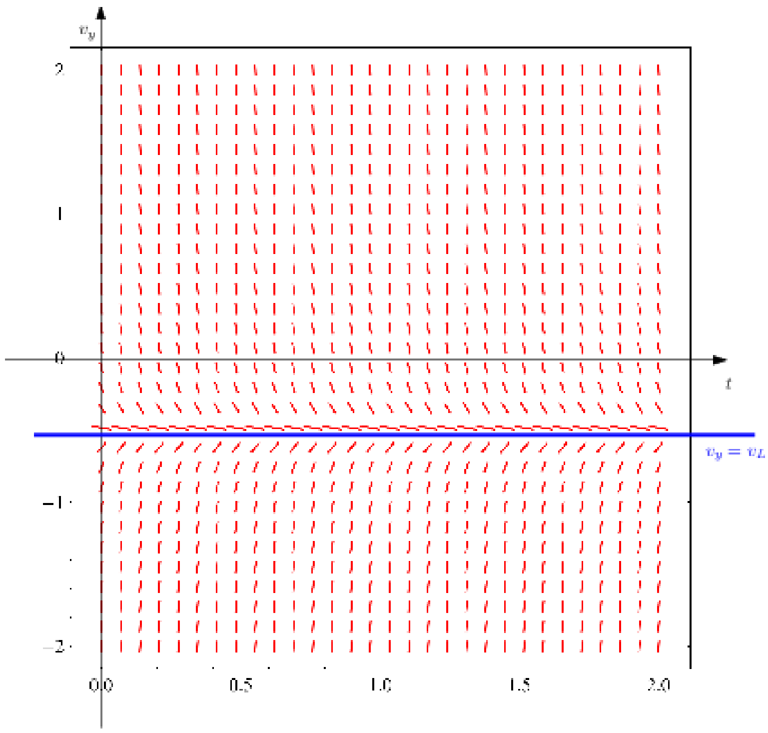

Figura 1.3: Una rappresentazione dell'Equazione (1.3) nel piano v_y (in m s^{-1})-t (in s). In ogni punto del piano l'equazione definisce la pendenza della curva. La retta orizzontale blu corrisponde a $v_y = v_L$: nei punti che le appartengono la pendenza è nulla. Si è scelto $v_L = -0.5\,\mathrm{m\ s^{-1}}$.

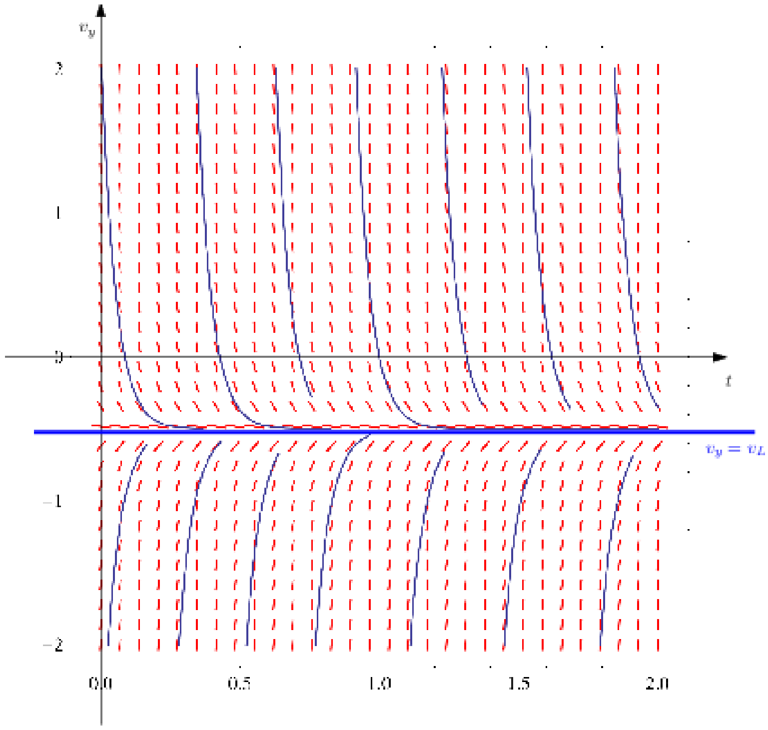

Figura 1.4: Una rappresentazione dell'Equazione (1.3) nel piano v_y (in $\mathrm{m\,s^{-1}}$)-t (in s). In ogni punto del piano l'equazione definisce la pendenza della curva. La retta orizzontale blu corrisponde a $v_y = v_L$: nei punti che le appartengono la pendenza è nulla. Si è scelto $v_L = -0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Sono state aggiunte delle possibili curve che in ogni punto hanno la giusta pendenza.

Esercizio 1 (Soluzione approssimata). Consideriamo l'equazione approssimata

$$\frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -g - \frac{\lambda}{m} v_y$$

dove si è sostituito l'accelerazione istantanea con l'accelerazione media su un intervallo Δt. Si vuole cercare una soluzione per v_y.

Notiamo anzitutto che possiamo riscrivere la precedente nella forma

$$\frac{\Delta u(t)}{\Delta t} = \frac{u\,(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} = -\frac{\lambda}{m} u(t)$$

dove $v_y = v_L + u$. Risolvendo rispetto a $u(t + \Delta t)$ otteniamo

$$u\,(t+\Delta t) = u(t) - \frac{\lambda \Delta t}{m} u(t) = \left(1 - \frac{\lambda}{m}\Delta t\right) u(t)$$

Questa è una relazione che dato il valore di u al tempo t ci permette di calcolarlo al tempo $t + \Delta t$. Iniziando da $t = 0$ abbiamo (dimostratelo, per esempio per induzione)

$$\begin{aligned}
u(\Delta t) &= \left(1 - \frac{\lambda}{m}\Delta t\right) u(0) \\
u(2\Delta t) &= \left(1 - \frac{\lambda}{m}\Delta t\right) u(\Delta t) = \left(1 - \frac{\lambda}{m}\Delta t\right)^2 u(0) \\
&\cdots\cdots \\
u(n\Delta t) &= \left(1 - \frac{\lambda}{m}\Delta t\right)^n u(0)
\end{aligned}$$

Poniamo adesso $t = n\Delta t$ e troviamo

$$u(t) = \left(1 - \frac{\lambda}{m}\Delta t\right)^{\frac{t}{\Delta t}} u(0) = e^{\frac{t}{\Delta t}\log\left(1 - \frac{\lambda}{m}\Delta t\right)} u(0) = e^{-Kt} u(0)$$

dove

$$K = -\frac{1}{\Delta t} \log\left(1 - \frac{\lambda}{m}\Delta t\right) > 0$$

Esprimendo nuovamente tutto questo in funzione di v_y otteniamo

$$v_y(t) = v_L + (v_y(0) - v_L)\, e^{-Kt} \tag{1.4}$$

di conseguenza vediamo che v_y tende esponenzialmente alla velocità limite, indipendentemente dalle condizioni iniziali. □

Cerchiamo adesso di "indovinare" una soluzione dell'equazione esatta. Una semplice ipotesi è che anche in questo caso si tratti di qualcosa del tipo

$$v_y(t) = A + Be^{-K't}$$

dove A, B e K' sono costanti da determinare. Derivando troviamo

$$\frac{dv_y}{dt} = -BK'e^{-K't}$$

e sostituendo nella (1.3) troviamo

$$-BK'e^{-K't} = -g - \frac{\lambda}{m}\left(A + Be^{-K't}\right)$$

Raccogliendo i termini troviamo

$$\left(\frac{\lambda}{m} - K'\right) Be^{-K't} + \left(g + \frac{\lambda A}{m}\right) = 0$$

Dato che il membro sinistro deve annullarsi per qualsiasi t, è necessario che i due termini si azzerino separatamente. Il secondo lo farà scegliendo

$$A = -\frac{mg}{\lambda} = v_L$$

Il primo si annulla sicuramente per $B = 0$: questo corrisponde alla soluzione a velocità costante $v_y = v_L$. Se $B \neq 0$ dovrà invece essere

$$K' = \frac{\lambda}{m}$$

e quindi la soluzione esatta sarà

$$v_y(t) = v_L + Be^{-K't}$$

ma dato che deve essere

$$v_y(0) = v_L + B$$

possiamo anche scrivere

$$v_y(t) = v_L + (v_y(0) - v_L)\, e^{-K't}$$

Se confrontiamo questa soluzione esatta con quella approssimata (1.4) vediamo che l'unica differenza è nel coefficiente del termine esponenziale. Inoltre, come ci si può aspettare,

$$\lim_{\Delta t \to 0} K = \lim_{\Delta t \to 0} -\frac{1}{\Delta t} \log\left(1 - \frac{\lambda}{m}\Delta t\right) = \frac{\lambda}{m} = K'$$

2 Filo con massa che pende da un tavolo

Consideriamo il sistema in Figura 2.1: un filo inestensibile di massa m e lunghezza ℓ è parzialmente appoggiato su un piano orizzontale.

Un tratto di lunghezza x pende inizialmente in verticale. Vogliamo capire come si muove il filo negli istanti successivi, in assenza di attrito, in presenza di un campo gravitazionale.

Scriviamo l'equazione del moto per il tratto di filo appoggiato sul piano orizzontale. Detta

$$\mu = \frac{m}{\ell}$$

la densità lineare di massa avremo

$$\underbrace{\mu\,(\ell - x)}_{\text{massa}} \quad \underbrace{\ddot{x}}_{\text{accelerazione}} \quad = \underbrace{T}_{\text{forza}} \tag{2.1}$$

dove T è la tensione nel punto in cui il filo si piega. Per quanto riguarda il tratto di filo che pende verticalmente avremo invece

$$\underbrace{\mu x}_{\text{massa}} \underbrace{\ddot{x}}_{\text{accelerazione}} \quad = \underbrace{-T + \mu x g}_{\text{forza}} \tag{2.2}$$

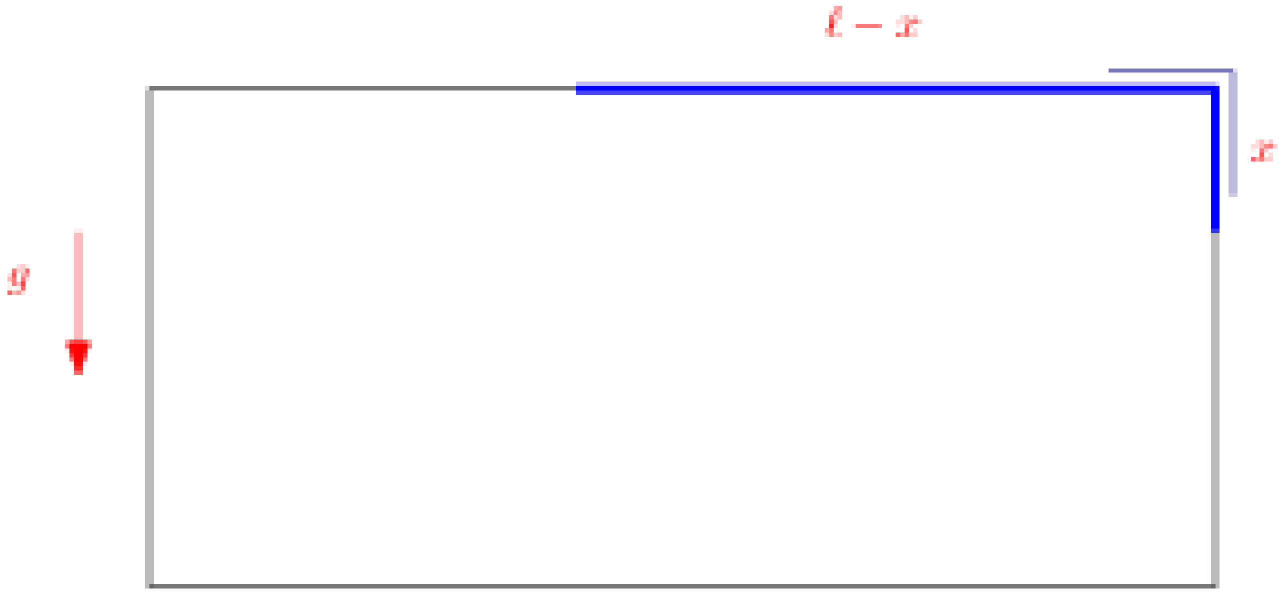

Figura 2.1: Il filo (in blu) considerato nel problema. É inestensibile, di lunghezza totale ℓ e massa totale m, distribuita uniformemente. Nel disegno è stato aggiunto un vincolo aggiuntivo a forma di L attorno all'angolo superiore destro, per sottolineare che il filo è vincolato a non distaccarsi dal piano, cosa che farebbe se fosse semplicemente appoggiato.

Sommando membro a membro troviamo

$$\mu\ell\ddot{x} = \mu x g$$

ossia

$$\ddot{x} = \frac{g}{\ell}x \tag{2.3}$$

Esercizio 2. Supponiamo che sia $g = 0$. La quantità $m\dot{x}$ è costante nel tempo?

La risposta è positiva, infatti

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} = 0$$

a causa della (2.3). □

Esercizio 3. $|m\dot{x}|$ è il modulo della quantità di moto totale del sistema?

No. Infatti la quantità di moto totale si scrive

$$\vec{p} = \mu(\ell - x)\dot{x}\hat{e}_x - \mu x\dot{x}\hat{e}_y$$

che in modulo vale

$$\begin{aligned} |\vec{p}| &= \sqrt{\mu^2(\ell - x)^2 + \mu^2 x^2}\,|\dot{x}| \\ &= \mu\sqrt{\ell^2 + 2x^2 - 2\ell x}\,|\dot{x}| \end{aligned}$$

□

Esercizio 4. La quantità di moto totale del sistema si conserva se $g = 0$?

Calcoliamo la derivata temporale della quantità di moto: abbiamo

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \mu(\ell - x)\ddot{x}\hat{e}_x - \mu\dot{x}^2\hat{e}_x - \mu x\ddot{x}\hat{e}_y - \mu\dot{x}^2\hat{e}_y$$

e dato che $g = 0$ anche $\ddot{x} = 0$, quindi

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\mu\dot{x}^2(\hat{e}_x + \hat{e}_y)$$

che è diversa da zero. Quindi non si conserva. Notare che non si conserva neppure il modulo della quantità di moto. Supponendo per semplicità $\dot{x} > 0$ abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mu\sqrt{\ell^2+2x^2-2\ell x}\dot{x} &= \mu\sqrt{\ell^2+2x^2-2\ell x}\ddot{x} + \mu\frac{2x-\ell}{\sqrt{\ell^2+2x^2-2\ell x}}\dot{x}^2 \\ &= \mu\frac{2x-\ell}{\sqrt{\ell^2+2x^2-2\ell x}}\dot{x}^2 \neq 0\end{aligned}$$

$\square$

Cerchiamo adesso di trovare la soluzione dell'Equazione (2.3). Si tratta essenzialmente di trovare una funzione proporzionale alla sua derivata seconda. Notiamo che

- La derivata di una funzione esponenziale è proporzionale alla funzione stessa, quindi lo sarà anche la sua derivata seconda:

$$\frac{d^2}{dt^2}e^{kt} = k^2 e^{kt}$$

- La derivata seconda di un seno o di un coseno ha la stessa proprietà:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\cos kt &= -k^2\cos kt \\ \frac{d^2}{dt^2}\sin kt &= -k^2\sin kt\end{aligned}$$

Tornando all' Equazione (2.3) notiamo però che la costante di proporzionalità deve essere positiva, quindi seno e coseno sono fuori causa. Cerchiamo quindi una soluzione esponenziale. Sostituendo abbiamo

$$k^2 e^{kt} = \frac{g}{\ell}e^{kt}$$

e troviamo due possibili soluzioni:

$$\begin{aligned}x_1(t) &\propto e^{\sqrt{g/\ell}t} \\ x_2(t) &\propto e^{-\sqrt{g/\ell}t}\end{aligned}$$

ma come si verifica facilmente (provate) una qualsiasi combinazione lineare delle due soluzioni è una soluzione. Allora possiamo scrivere

$$x(t) = Ae^{\sqrt{g/\ell}t} + Be^{-\sqrt{g/\ell}t}$$

Per determinare le costanti arbitrarie scriviamo

$$\begin{aligned} x(0) &= A + B = x_0 \\ \dot{x}(0) &= \sqrt{\frac{g}{\ell}}A - \sqrt{\frac{g}{\ell}}B = 0 \end{aligned}$$

e risolvendo otteniamo

$$A = B = \frac{x_0}{2}$$

dove abbiamo indicato con x_0 il tratto che sporge inizialmente. In conclusione

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0\frac{e^{\sqrt{g/\ell}t} + e^{-\sqrt{g/\ell}t}}{2} \equiv x_0 \cosh\sqrt{\frac{g}{\ell}}t \\ v(t) &= x_0\sqrt{\frac{g}{\ell}}\frac{e^{\sqrt{g/\ell}t} - e^{-\sqrt{g/\ell}t}}{2} \equiv x_0\sqrt{\frac{g}{\ell}}\sinh\sqrt{\frac{g}{\ell}}t \end{aligned}$$

Quindi $x(t)$ cresce con una legge praticamente esponenziale nel tempo, fino a quando $x = \ell$. In quel momento tutto il filo si trova sul piano verticale, ed inizia a cadere con accelerazione costante g.

Esercizio 5. Calcolare dopo quanto tempo $x = \ell$.
(La soluzione apparirà in seguito.)

Esercizio 6. Calcolare la velocità del filo quando $x = \ell$.
(La soluzione apparirà in seguito.)

Consideriamo adesso la tensione lungo il filo. Introduciamo una coordinata u che ci dice quale punto di quest'ultimo stiamo considerando: in particolare $u = 0$ e $u = \ell$ corrisponderanno agli estremi.

Esercizio 7. Calcolare la tensione $T(u)$ al variare di x. Considerare in particolare il caso $x = 0$ e $x = \ell$.

(La soluzione apparirà in seguito.)

Nel ricavare le Equazioni (2.1) e (2.2) abbiamo applicato la legge $F = ma$ al tratto di filo sul piano orizzontale e a quello sul piano verticale. Però la massa di questi tratti non è costante nel tempo. É legittimo fare questo nel caso considerato? Discuteremo questo punto in dettaglio quando parleremo dei sistemi di massa variabile, ma invitiamo a riflettere prima autonomamente sul problema.