Esercitazioni di Fisica 1

Ultima versione: 12 febbraio 2014

Oscillatore armonico bidimensionale. Il pendolo di Foucault.

1 Oscillatore armonico bidimensionale

Vogliamo studiare il moto di un oscillatore bidimensionale, che possiamo realizzare collegando una massa m a un punto fisso mediante una molla ideale di costante elastica k, massa trascurabile e lunghezza a riposo nulla.

Esercizio 1. Scrivere e risolvere le equazioni del moto del sistema, utilizzando coordinate Cartesiane.

Ponendo l'origine del sistema di coordinate nel punto fisso, indichiamo con x e y le coordinate della massa. Le equazioni del moto sono

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

dove $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y$ e

$$\vec{F} = -k\ell\hat{e}_r$$

è la forza elastica. Dato che l'allungamento della molla è dato da $\ell = \sqrt{x^2+y^2}$ e che il versore $\hat{e}_r$ nella direzione di questa vale

$$\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

abbiamo le due equazioni

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx \\ m\ddot{y} &= -ky \end{aligned}$$

Entrambe rappresentano un oscillatore armonico con pulsazione $\omega = \sqrt{k/m}$. La soluzione generale è quindi

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ y(t) &= C\cos\omega t + D\sin\omega t \end{aligned}$$

dove le costanti reali A, B, C e D possono essere determinate imponendo le condizioni iniziali.

Esercizio 2. Scrivere la soluzione generale determinata nell'esercizio precedente in funzione delle posizioni e delle velocità iniziali.

Le posizioni iniziali sono date da

$$\begin{aligned} x(0) &= A \\ y(0) &= C \end{aligned}$$

e derivando le leggi orarie troviamo le velocità

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \\ \dot{y}(t) &= -C\omega \sin \omega t + D\omega \cos \omega t \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega}\dot{x}(0) &= B \\ \frac{1}{\omega}\dot{y}(0) &= D \end{aligned}$$

Sostituendo troviamo

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) \cos \omega t + \frac{1}{\omega}\dot{x}(0) \sin \omega t \\ y(t) &= y(0) \cos \omega t + \frac{1}{\omega}\dot{y}(0) \sin \omega t \end{aligned}$$

Esercizio 3. Mostrare che la traiettoria più generale è un'ellisse (eventualmente degenere) centrata sull'origine.

Osserviamo che è possibile ricavare dalle leggi orarie precedenti $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$. In effetti

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) & \frac{1}{\omega}\dot{x}(0) \\ y(0) & \frac{1}{\omega}\dot{y}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) & \frac{1}{\omega}\dot{x}(0) \\ y(0) & \frac{1}{\omega}\dot{y}(0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{x(0)\dot{y}(0) - \dot{x}(0)y(0)} \begin{pmatrix} \dot{y}(0) & -\dot{x}(0) \\ -\omega y(0) & \omega x(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Per calcolare l'inversa della matrice e quindi risolvere il sistema il determinante

$$\Delta = x(0)\dot{y}(0) - \dot{x}(0)y(0)$$

deve essere diverso da zero. Il caso $\Delta = 0$ sarà considerato a parte. Notiamo che Δ è proporzionale al momento angolare iniziale del sistema rispetto ad un polo scelto nel punto fisso: infatti

$$\vec{L} = m\,(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y) \wedge (\dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y) = m\Delta\hat{e}_z$$

Inoltre sappiamo che $\vec{L}$ è una costante del moto, dato che la forza elastica ha momento nullo.

Notiamo adesso che

$$\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix} = \cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$$

e quindi

$$\frac{1}{\Delta^2}\begin{pmatrix}x(t) & y(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{y}(0) & -\omega y(0)\\ -\dot{x}(0) & \omega x(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{y}(0) & -\dot{x}(0)\\ -\omega y(0) & \omega x(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = 1$$

ossia

$$\begin{pmatrix}x(t) & y(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{y}(0)^2+\omega^2 y(0)^2 & -\dot{y}(0)\dot{x}(0)-\omega^2 x(0)y(0)\\ -\dot{y}(0)\dot{x}(0)-\omega^2 x(0)y(0) & \dot{x}(0)^2+\omega^2\dot{y}(0)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \Delta^2$$

La forma quadratica al membro sinistro è definita positiva, quindi la traiettoria è un'ellisse.

Consideriamo adesso il caso particolare $\Delta = 0$. Le due righe della matrice in (1.1) sono linearmente dipendenti, e quindi il rapporto $x(t)/y(t)$ dovrà essere costante. La traiettoria sarà quindi un segmento passante per l'origine, cioè un'ellisse degenere.

Esercizio 4. Scrivere l'equazione della traiettoria in termini di quantità conservate.

Osserviamo che le energie associate alle due oscillazioni armoniche si conservano separatamente

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2\\ E_y &= \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{m\omega^2}{2}y^2 \end{aligned}$$

Inoltre anche

$$Q = \frac{m}{2}\left(\dot{y}\dot{x} + \omega^2 xy\right)$$

si conserva, infatti

$$\frac{2}{m}\frac{dQ}{dt} = \ddot{y}\dot{x} + \dot{y}\ddot{x} + \omega^2\dot{x}y + \omega^2 x\dot{y}$$

e utilizzando le equazioni del moto

$$\frac{2}{m}\frac{dQ}{dt} = -\omega^2 y\dot{x} - \omega^2 x\dot{y} + \omega^2\dot{x}y + \omega^2 x\dot{y} = 0$$

In conclusione possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix}x(t) & y(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_y & -Q\\ -Q & E_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \frac{m}{2}\Delta^2 = \frac{L^2}{2m}$$

Tra parentesi possiamo verificare direttamente che la matrice al membro sinistro è definita positiva. Dato che $E_y > 0$ basta verificare che il determinante è positivo. Abbiamo

$$\begin{aligned}
E_x E_y - Q^2 &= \frac{m^2}{4}\left[\left(\dot{x}^2+\omega^2 x^2\right)\left(\dot{y}^2+\omega^2 y^2\right)-\left(\dot{y}\dot{x}+\omega^2 xy\right)^2\right] \\
&= \frac{m^2}{4}\left[\omega^2 x^2 \dot{y}^2 + \omega^2 y^2 \dot{x}^2 - 2\omega^2 \dot{x}\dot{y}xy\right] \\
&= \frac{m^2\omega^2}{4}\left(x\dot{y}-y\dot{x}\right)^2 = \frac{\omega^2}{4}L^2 > 0
\end{aligned}$$

Esercizio 5. Trovare i semiassi dell'ellisse, considerando gli autovalori e gli autovettori della matrice precedente. Considerare anche il limite $\Delta \to 0$. (*Lasciato allo studente*).

Esercizio 6. Il moto considerato è un esempio di moto sotto l'azione di una forza centrale conservativa. Ci si poteva quindi aspettare a priori la conservazione di $\vec{L}$ e dell'energia totale E. Sapendo che le traiettorie erano sempre ellissi, sarebbe stato possibile dedurre l'esistenza di altre leggi di conservazione? Discutere. (*Lasciato allo studente*).

Per il sistema considerato le coordinate Cartesiane sono molto convenienti, e permettono di risolvere in modo semplice il problema. Quando si ha a che fare con forze centrali si preferisce in genere utilizzare le coordinate polari. Vedremo negli esercizi seguenti come si può discutere il problema considerato con queste ultime.

Esercizio 7. Scrivere l'energia e il momento angolare del sistema utilizzando coordinate polari. Discutere qualitativamente le orbite utilizzando il metodo del potenziale efficace.

Abbiamo per l'energia

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{k}{2}r^2$$

e per il momento angolare

$$L_z = mr^2\dot{\theta}$$

Eliminando $\dot{\theta}$ dall'energia abbiamo

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} + \frac{k}{2}r^2$$

Per $L_z \neq 0$ il potenziale cresce senza limite per $r \to 0$ e per $r \to \infty$. Tutte le traiettorie (per qualsiasi valore dell'energia) saranno dunque limitate. In particolare il potenziale efficace ha un unico minimo determinato da

$$\frac{d}{dr^2}\left(\frac{L_z^2}{2mr^2} + \frac{k}{2}r^2\right) = -\frac{L_z^2}{2mr^4} + \frac{k}{2} = 0$$

cioè

$$r_0^2 = \sqrt{\frac{L_z^2}{mk}}$$

Quindi quando l'energia totale avrà il valore

$$E = \frac{L_z^2}{2mr_0^2} + \frac{k}{2}r_0^2 = L_z\sqrt{\frac{k}{m}}$$

la traiettoria sarà una circonferenza di raggio r_0.

Esercizio 8. Determinare la traiettoria nel caso generale.

Anzitutto vediamo che possiamo scrivere

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{L_z}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} + \frac{k}{2}r^2$$

Possiamo vedere questa relazione come un'equazione differenziale per $r(\theta)$. Per cercare di risolverla proviamo a introdurre una nuova variabile

$$u = \alpha + \frac{1}{r^2}$$

dove α è una costante da determinare. Abbiamo anzitutto

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{2}{r^3}\frac{dr}{d\theta}$$

ed inoltre

$$\frac{1}{r^2} = u - \alpha$$

Sostituendo nell'espressione precedente troviamo

$$E\left(u-\alpha\right) = \frac{L_z^2}{8m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2m}\left(u-\alpha\right)^2 + \frac{k}{2}$$

Scegliamo adesso α in modo da cancellare i termini lineari in u. Questo significa che deve essere

$$\alpha = -\frac{m\beta E}{L_z^2}$$

e quindi

$$\frac{m^2}{L_z^4}\left(E^2 - \frac{kL_z^2}{m}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + 4u^2\right]$$

Le traiettorie ammesse corrispondono a valori di energia per i quali il membro sinistro è positivo: questo è consistente con lo studio del potenziale efficace visto in precedenza. Possiamo scrivere più semplicemente

$$E' = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}4u^2$$

Questa è formalmente l'energia di un oscillatore armonico descritto dalla coordinata u con $\omega = 2$. La soluzione generale per $u(\theta)$ è quindi

$$u = \sqrt{\frac{E'}{2}} \cos\left(2\theta + \phi\right)$$

e tornando alla variabile r

$$\alpha + \frac{1}{r^2} = A \cos\left(2\theta + \phi\right)$$

ossia

$$r^2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{E'}{2}} \cos\left(2\theta + \phi\right) + \frac{mE}{L_z^2}}$$

Notiamo che la costante ϕ corrisponde ad una rotazione di un angolo $\phi/2$, quindi possiamo considerare il solo caso $\phi = 0$ per capire come è fatta la traiettoria. Abbiamo allora

$$r^2 = \frac{\frac{L_z^2}{mE}}{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{kL_z^2}{mE^2}\right)} \cos 2\theta} \tag{1.2}$$

che come vedremo tra breve è una ellisse. I quadrati dei semiassi corrisponderanno al valore massimo e minimo di r^2, ossia a

$$r_{\pm}^2 = \frac{\frac{L_z^2}{mE}}{1 \mp \sqrt{\left(1 - \frac{kL_z^2}{mE^2}\right)}} = \frac{E}{k}\left[1 \pm \sqrt{\left(1 - \frac{kL_z^2}{mE^2}\right)}\right]$$

Per verificar che abbiamo a che fare con un'ellisse con centro nell'origine riscriviamo l'equazione (1.2) nella forma

$$r^2 + \sqrt{\left(1 - \frac{kL_z^2}{mE^2}\right)} r^2 \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = \frac{L_z^2}{mE}$$

ossia

$$\left[1 + \sqrt{\left(1 - \frac{kL_z^2}{mE^2}\right)}\right] x^2 + \left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{kL_z^2}{mE^2}\right)}\right] y^2 = \frac{L_z^2}{mE}$$

che corrisponde effettivamente ad una ellisse con i semiassi del valore determinato precedentemente.

2 Il pendolo di Foucault

Vogliamo studiare adesso il moto di un pendolo sospeso sulla superficie terrestre, tenendo conto degli effetti legati alla rotazione terrestre. Scriveremo le relative equazioni del moto in un sistema solidale con la terra.

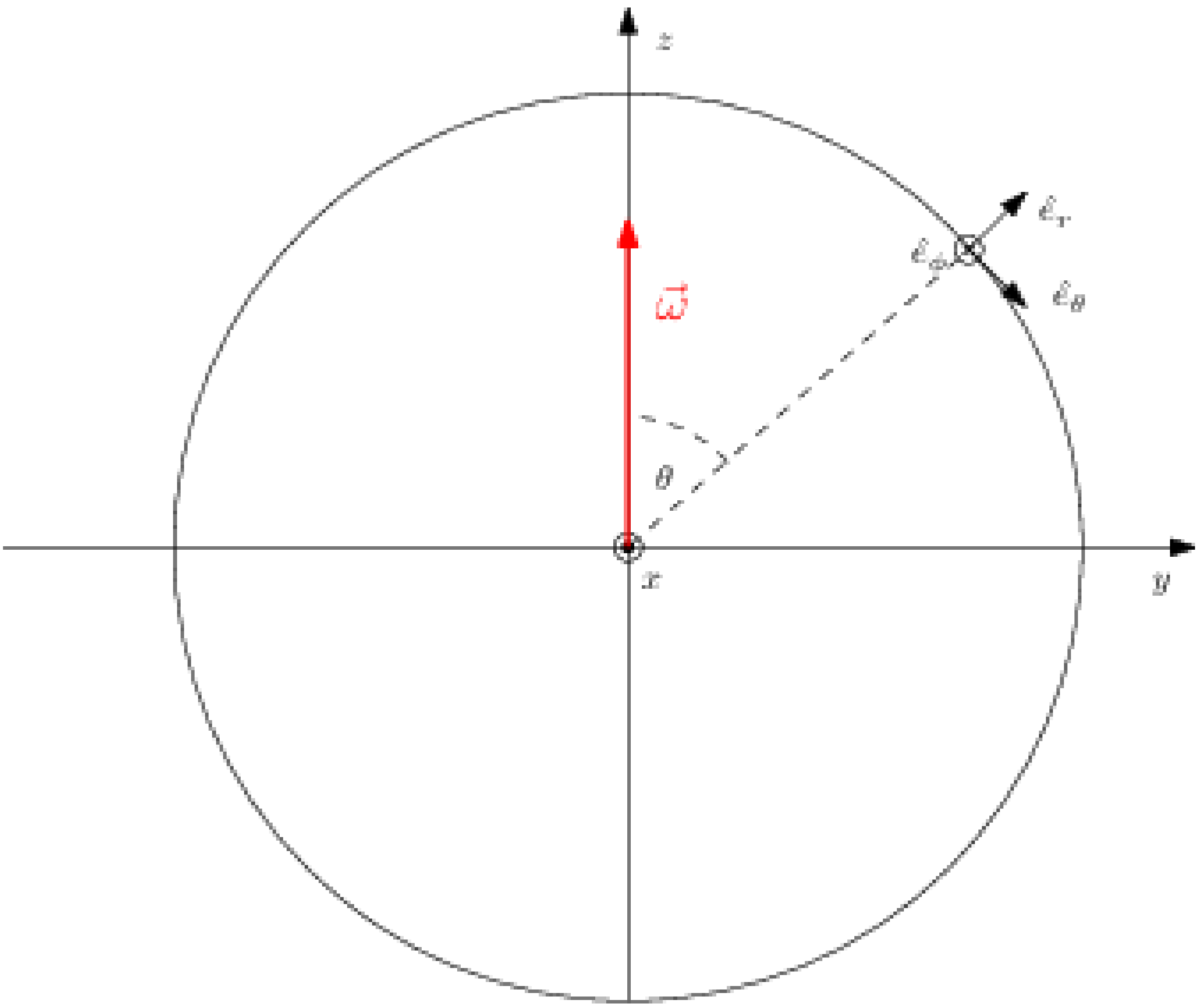

Figura 2.1: Il sistema di riferimento utilizzato per studiare il pendolo.

Indicheremo la posizione della massa del pendolo con il vettore

$$\vec{R}_p = R_T \hat{e}_r + \ell \hat{n}$$

dove $\hat{n}$ è un versore diretto lungo il filo, che sarà la nostra variabile. Il momento angolare del pendolo rispetto al punto di sospensione sarà dunque

$$\vec{L} = m\left(\ell\hat{n}\right) \wedge \frac{d}{dt}\left(\ell\hat{n}\right) = m\ell^2 \hat{n} \wedge \frac{d\hat{n}}{dt}$$

Consideriamo adesso le forze applicate alla massa. Abbiamo:

1. La tensione del filo, $-T\hat{n}$;
2. la forza peso, $-mg\hat{e}_r$;
3. la forza centrifuga, $-m\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{R}_p\right)$;
4. la forza di Coriolis, $-2m\ell\vec{\omega} \wedge \frac{d\hat{n}}{dt}$.

Scriviamo la seconda equazione cardinale, scegliendo come polo il punto di sospensione. Avremo

$$m\ell^2 \frac{d}{dt}\left(\hat{n} \wedge \frac{d\hat{n}}{dt}\right) = \ell\hat{n} \wedge \left[-T\hat{n} - mg\hat{e}_r - m\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{R}_p\right) - 2m\ell\vec{\omega} \wedge \frac{d\hat{n}}{dt}\right]$$

ossia, semplificando alcuni termini che si annullano,

$$\hat{n} \wedge \frac{d^2\hat{n}}{dt^2} = \left[-\frac{g}{\ell}\hat{n} \wedge \hat{e}_r - \frac{1}{\ell}\hat{n} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{R}_p\right)\right) - 2\hat{n} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \frac{d\hat{n}}{dt}\right)\right] \tag{2.1}$$

Determiniamo adesso $\hat{n}$ in condizioni di equilibrio. L'equazione precedente diviene, omettendo le derivate temporali di $\hat{n}$

$$\hat{n} \wedge \left[g\hat{e}_r + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{R}_p\right)\right] = 0$$

Questo significa che $\hat{n}$ all'equilibrio deve essere parallelo al vettore tra parentesi quadre. Calcoliamo esplicitamente quest'ultimo:

$$\begin{aligned}
g\hat{e}_r + R_T\omega^2 \hat{z} \wedge (\hat{z} \wedge \hat{e}_r) &= g\hat{e}_r + R_T\omega^2 \hat{z} \wedge (\hat{z} \wedge \hat{e}_r) \\
&= g\hat{e}_r + R_T\omega^2 \sin\theta\, (\hat{z} \wedge \hat{e}_\phi) \\
&= \left(g + R_T\omega^2 \sin^2\theta\right) \hat{e}_r + R_T\omega^2 \sin\theta\cos\theta\hat{e}_\theta
\end{aligned}$$

Normalizzando in modo da avere un versore abbiamo infine

$$\hat{n}_{eq} = \pm\frac{\left(g + R_T\omega^2 \sin^2\theta\right) \hat{e}_r + R_T\omega^2 \sin\theta\cos\theta\hat{e}_\theta}{\sqrt{g^2 + \left(\omega^2 R_T + 2g\right) R_T\omega^2 \sin^2\theta}}$$

e nel seguito sceglieremo il segno negativo, che corrisponde alla posizione di equilibrio.

Esercizio 9. Ricavare le equazioni del moto, nell'approssimazione di piccole oscillazioni.

Possiamo scrivere

$$\hat{n} = \hat{n}_{eq} + \vec{\delta}$$

dove $\vec{\delta}$ è una piccola perturbazione della posizione di equilibrio. Dato che $\hat{n}$ e $\hat{n}_{eq}$ devono essere versori abbiamo

$$\hat{n} \cdot \hat{n} = \hat{n}_{eq} \cdot \hat{n}_{eq} + 2\hat{n}_{eq} \cdot \vec{\delta} + O\left(\delta^2\right)$$

e quindi in questa approssimazione $\hat{n}_{eq} \cdot \vec{\delta} = 0$, ossia la perturbazione è perpendicolare al vettore $\hat{n}_{eq}$. Sostituiamo adesso nella Equazione (2.1), tenendo solo i termini del primo ordine in $\vec{\delta}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\hat{n}_{eq} \wedge \frac{d^2\vec{\delta}}{dt^2} &= -\frac{g}{\ell}\vec{\delta} \wedge \hat{e}_r \\
&- \omega^2 \hat{n}_{eq} \wedge \left(\hat{z} \wedge \left(\hat{z} \wedge \vec{\delta}\right)\right) - \frac{R_T\omega^2}{\ell}\vec{\delta} \wedge \left(\hat{z} \wedge \left(\hat{z} \wedge \hat{e}_r\right)\right) \\
&- 2\omega\hat{n}_{eq} \wedge \left(\hat{z} \wedge \frac{d\vec{\delta}}{dt}\right)
\end{aligned}$$

Nella prima riga abbiamo il termine legato al momento delle forze gravitazionali, nella seconda i termini legati alla forza centrifuga e nell'ultima quelli legati alla forza di Coriolis. Dato che per piccole oscillazioni $\vec{\delta}$ rimane nel piano ortogonale a $\hat{n}_{eq}$ possiamo dire che lo faranno anche le sue derivate prime e seconde. Approfittiamo adesso dell'identità

$$\left(\hat{n}_{eq} \wedge \vec{a}\right) \wedge \hat{n}_{eq} = \vec{a}_\perp$$

dove $\vec{a}_\perp$ è la parte di $\vec{a}$ perpendicolare a $\hat{n}_{eq}$, e calcoliamo il prodotto vettoriale di $\hat{n}_{eq}$ con ambo i membri dell'equazione precedente. Otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\vec{\delta}}{dt^2} &= -\frac{g}{\ell}\left(\vec{\delta} \wedge \hat{e}_r\right) \wedge \hat{n}_{eq} \\
&- \omega^2 \left[\hat{z} \wedge \left(\hat{z} \wedge \vec{\delta}\right)\right]_\perp - \frac{g}{\ell}\frac{R_T\omega^2}{g}\left\{\vec{\delta} \wedge \left[\hat{z} \wedge \left(\hat{z} \wedge \hat{e}_r\right)\right]\right\} \wedge \hat{n}_{eq} \\
&- 2\omega\left(\hat{z} \wedge \frac{d\vec{\delta}}{dt}\right)_\perp
\end{aligned}$$

Utilizziamo adesso l'identità

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$

per ottenere

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\vec{\delta}}{dt^2} &= \frac{g}{\ell}\left(\hat{n}_{eq}\cdot\hat{e}_r\right)\vec{\delta} \\
&+ \frac{g}{\ell}\frac{R_T\omega^2}{g}\hat{n}_{eq}\cdot\left[\hat{z}\wedge\left(\hat{z}\wedge\hat{e}_r\right)\right]\vec{\delta} \\
&+ \omega^2\left[\vec{\delta}-\hat{z}\left(\hat{z}\cdot\vec{\delta}\right)\right]_\perp \\
&- 2\omega\left(\hat{z}\wedge\frac{d\vec{\delta}}{dt}\right)_\perp
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Per avere un'idea degli ordini di grandezza notiamo che il parametro adimensionale

$$\varepsilon = \frac{\omega^2\ell}{g} = \frac{\ell}{9.8\,\mathrm{ms}^{-2}}\left(\frac{2\pi}{24\times 60\times 60}\,\mathrm{s}\right) \simeq \left(\frac{\ell}{1.8\times 10^9\,\mathrm{m}}\right)$$

è molto piccolo per pendoli di lunghezza ragionevole. Anche il fattore

$$\gamma = \frac{R_T\omega^2}{g} \simeq \frac{6.371\times 10^6\,\mathrm{m}}{9.8\,\mathrm{ms}^{-2}}\left(\frac{2\pi}{24\times 60\times 60}\,\mathrm{s}\right)^2 \simeq 3.4\times 10^{-3}$$

che rappresenta il rapporto tra la forza di gravità e la forza centrifuga, è piccolo. Possiamo scrivere in conclusione

$$\frac{d^2\vec{\delta}}{dt^2}+2\omega\left(\hat{z}\wedge\frac{d\vec{\delta}}{dt}\right)_\perp+\frac{g}{\ell}\left\{-\left(\hat{n}_{eq}\cdot\hat{e}_r\right)-\gamma\hat{n}_{eq}\cdot\left[\hat{z}\left(\hat{z}\cdot\hat{e}_r\right)-\hat{e}_r\right]\right\}\vec{\delta}-\frac{g}{\ell}\varepsilon\left[\vec{\delta}-\hat{z}\left(\hat{z}\cdot\vec{\delta}\right)\right]_\perp = 0$$

Trascurando l'ultimo termine queste equazioni si possono scrivere nella forma semplice

$$\frac{d^2\vec{\delta}}{dt^2}+2\omega\left(\hat{z}\wedge\frac{d\vec{\delta}}{dt}\right)_\perp+\omega_p^2\vec{\delta}=0$$

dove

$$\begin{aligned}
\omega_p^2 &= -\frac{g}{\ell}\left[(1-\gamma)\left(\hat{n}_{eq}\cdot\hat{e}_r\right)+\gamma\left(\hat{n}_{eq}\cdot\hat{z}\right)\left(\hat{z}\cdot\hat{e}_r\right)\right] \\
&= -\frac{g}{\ell}\left[\left(1-\gamma\sin^2\theta\right)\left(\hat{n}_{eq}\cdot\hat{e}_r\right)-\gamma\cos\theta\sin\theta\left(\hat{n}_{eq}\cdot\hat{e}_\theta\right)\right] \\
&= \frac{g}{\ell}\frac{1-\gamma^2\sin^4\theta+\gamma^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{\sqrt{1+\left(\gamma^2+2\gamma\right)\sin^2\theta}}
\end{aligned}$$

Introduciamo adesso delle coordinate esplicite per la perturbazione, nella forma

$$\vec{\delta} = X\hat{e}_\phi + Y\left(\hat{n}_{eq}\wedge\hat{e}_\phi\right)$$

La coordinata X rappresenta quindi il moto del pendolo nella direzione del parallelo, Y quello nella direzione del meridiano. Inoltre $\hat{z}\cdot\hat{e}_\phi = 0$. Le equazioni del moto diventano

$$\hat{n}_{eq} = -\frac{\left(1+\gamma\sin^2\theta\right)\hat{e}_r+\gamma\sin\theta\cos\theta\hat{e}_\theta}{\sqrt{1+\left(\gamma^2+2\gamma\right)\sin^2\theta}}$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{X}\hat{e}_\phi + \ddot{Y}\left(\hat{n}_{eq}\wedge\hat{e}_\phi\right) &= \frac{g}{\ell}\left(\hat{n}_{eq}\cdot\hat{e}_r\right)\left[X\hat{e}_\phi + Y\left(\hat{n}_{eq}\wedge\hat{e}_\phi\right)\right] \\
&+ \omega^2\left[X\hat{e}_\phi + Y\left(\hat{n}_{eq}\wedge\hat{e}_\phi\right) - \hat{z}_\perp\left[\hat{z}_\perp\cdot\left(\hat{n}_{eq}\wedge\hat{e}_\phi\right)\right]Y\right] \\
&+ \frac{R_T\omega^2}{\ell}\hat{n}_{eq}\cdot\left(\hat{z}\cos\theta - \hat{e}_r\right)\left[X\hat{e}_\phi + Y\left(\hat{n}_{eq}\wedge\hat{e}_\phi\right)\right] \\
&- 2\omega\left(\hat{z}\wedge\hat{e}_\phi\dot{X} + \hat{z}\wedge\left(\hat{n}_{eq}\wedge\hat{e}_\phi\right)\dot{Y}\right)_\perp \\
&= \frac{g}{\ell}\left(\hat{n}_{eq}\cdot\hat{e}_r\right)\left[X\hat{e}_\phi + Y\left(\hat{n}_{eq}\wedge\hat{e}_\phi\right)\right] \\
&+ \omega^2\left[X\hat{e}_\phi + Y\left(\hat{n}_{eq}\wedge\hat{e}_\phi\right) - \left[\hat{z}_\perp\cdot\left(\hat{n}_{eq}\wedge\hat{e}_\phi\right)\right]^2\left(\hat{n}_{eq}\wedge\hat{e}_\phi\right)Y\right] \\
&+ \frac{R_T\omega^2}{\ell}\hat{n}_{eq}\cdot\left(\hat{z}\cos\theta - \hat{e}_r\right)\left[X\hat{e}_\phi + Y\left(\hat{n}_{eq}\wedge\hat{e}_\phi\right)\right] \\
&- 2\omega\left[\left(\hat{z}\wedge\hat{e}_\phi\right)\cdot\left(\hat{n}_{eq}\wedge\hat{e}_\phi\right)\left(\hat{n}_{eq}\wedge\hat{e}_\phi\right)\dot{X} - \hat{e}_\phi\left(\hat{z}\cdot\hat{n}_{eq}\right)\dot{Y}\right]
\end{aligned}
$$

Separiamo adesso le due componenti, ottenendo il sistema

$$
\begin{aligned}
\ddot{X} &= \left\{\frac{g}{\ell}\left(\hat{n}_{eq}\cdot\hat{e}_r\right) + \omega^2 + \frac{R_T\omega^2}{\ell}\hat{n}_{eq}\cdot\left(\hat{z}\cos\theta - \hat{e}_r\right)\right\}X + 2\omega\left(\hat{z}\cdot\hat{n}_{eq}\right)\dot{Y} \\
\ddot{Y} &= \frac{g}{\ell}\left(\hat{n}_{eq}\cdot\hat{e}_r\right)Y + \omega^2\left\{1 - \left[\hat{z}\cdot\left(\hat{n}_{eq}\wedge\hat{e}_\phi\right)\right]^2\right\}Y + \frac{R_T\omega^2}{\ell}\hat{n}_{eq}\cdot\left(\hat{z}\cos\theta - \hat{e}_r\right)Y \\
&- 2\omega\left(\hat{z}\cdot\hat{n}_{eq}\right)\dot{X}
\end{aligned}
$$

Notiamo adesso che

$$
\omega^2 \ll \frac{g}{\ell}
$$

e possiamo quindi approssimare

$$
\begin{aligned}
\ddot{X} &= \frac{g}{\ell}\left[\left(\hat{n}_{eq}\cdot\hat{e}_r\right) + \frac{R_T\omega^2}{g}\hat{n}_{eq}\cdot\left(\hat{z}\cos\theta - \hat{e}_r\right)\right]X + 2\omega\left(\hat{z}\cdot\hat{n}_{eq}\right)\dot{Y} \\
\ddot{Y} &= \frac{g}{\ell}\left[\left(\hat{n}_{eq}\cdot\hat{e}_r\right) + \frac{R_T\omega^2}{g}\hat{n}_{eq}\cdot\left(\hat{z}\cos\theta - \hat{e}_r\right)\right]Y - 2\omega\left(\hat{z}\cdot\hat{n}_{eq}\right)\dot{X}
\end{aligned}
$$

ed abbiamo quindi a che fare con equazioni del tipo

$$
\begin{aligned}
\ddot{X} &= -\Omega^2 X + 2\varpi\dot{Y} \\
\ddot{Y} &= -\Omega^2 Y - 2\varpi\dot{X}
\end{aligned}
$$

Se non fosse per i termini proporzionali a ϖ queste sarebbero le equazioni per l'oscillatore bidimensionale studiato precedentemente. Per vedere cosa cambia in questo caso è conveniente introdurre la coordinata complessa

$$
Z = X + iY
$$

in termini della quale le due equazioni precedenti diventano

$$\ddot{Z} = -\Omega^2 Z - 2i\overline{\omega}\dot{Z}$$

Notiamo che utilizzando Z stiamo identificando il piano complesso con il piano nel quale avviene il moto. Cerchiamo delle soluzioni del tipo

$$Z = e^{i\lambda t}$$

che saranno corrette se

$$\lambda^2 + 2\overline{\omega}\lambda - \Omega^2 = 0$$

Questo accade per i due valori

$$\lambda = -\overline{\omega} \pm \sqrt{\overline{\omega}^2 + \Omega^2}$$

La soluzione generale sarà quindi

$$Z = e^{-i\overline{\omega}t}\left[Z_1 e^{i\sqrt{\overline{\omega}^2+\Omega^2}t} + Z_2 e^{-i\sqrt{\overline{\omega}^2+\Omega^2}t}\right]$$