Esercitazioni di Fisica 1

Ultima versione: 22 gennaio 2014

Diversi esercizi sul corpo rigido.

1 Cilindro che rotola su un piano inclinato

Un cilindro di massa M e raggio R è appoggiato su un piano inclinato inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. È presente attrito dinamico (coefficiente μ_D) e attrito statico (coefficiente μ_S). Si vuole discutere il moto del cilindro al variare dei parametri del problema e delle condizioni iniziali (velocità e velocità angolare iniziale del cilindro).

Esercizio 1. Scrivere le equazioni del moto del sistema.

Scriviamo prima di tutto le equazioni del moto per il centro di massa. Scegliendo gli assi come in Figura 1.1 abbiamo

$$M\dot{v}_x = F_a + Mg\sin\theta \tag{1.1}$$
$$0 = N - Mg\cos\theta \tag{1.2}$$

Nella prima equazione F_a indica la forza di attrito statico, che ancora non conosciamo. Nella seconda il membro sinistro vale zero perché $\dot{v}_y = 0$, e si ricava immediatamente il valore costante della reazione normale del piano $N = Mg\cos\theta$.

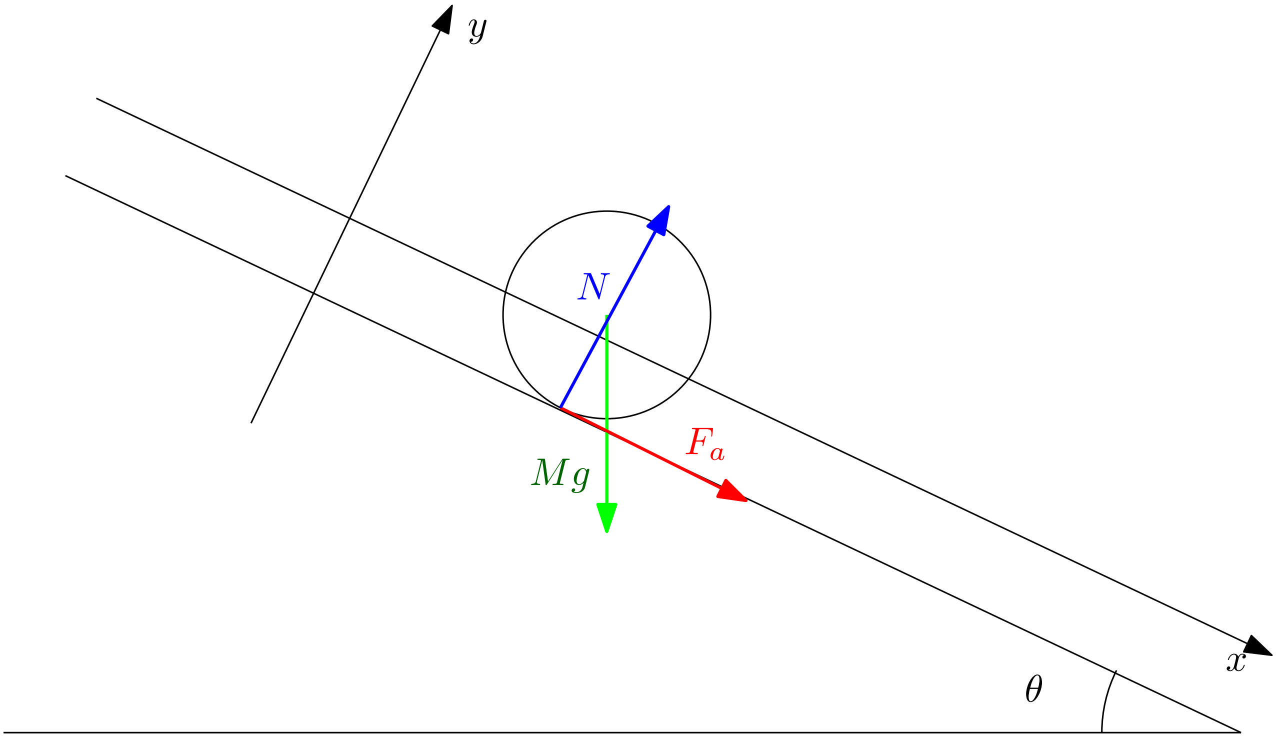

Figura 1.1: Il cilindro sul piano inclinato. Sono indicate le forze che agiscono su di esso: la reazione normale del piano (blu), la forza di attrito (rossa) e la forza peso (verde).

Per quanto riguarda la forza di attrito occorre distinguere tre casi diversi, a seconda della velocità del punto del cilindro a contatto con il piano. Quest'ultima vale

$$v_0 = v_x + R\omega$$

e abbiamo

$$\begin{aligned} F_a &= -\mu_D N \qquad (v_0 > 0) \\ F_a &= \mu_D N \qquad (v_0 < 0) \\ |F_a| &\leq \mu_s N \qquad (v_0 = 0) \end{aligned}$$

Scriviamo adesso la seconda equazione cardinale, scegliendo come polo il centro di massa del cilindro. Abbiamo

$$\frac{dL_{CM}}{dt} = I_{CM}\dot{\omega} = F_a R \tag{1.3}$$

dato che l'unica momento diverso da zero è quello della forza di attrito.

Esercizio 2. Mostrare che si ottengono equazioni equivalenti scegliendo il polo nel punto di contatto.

In questo caso la forza di attrito non ha momento, ma lo ha la forza peso. Possiamo allora scrivere

$$\frac{dL_O}{dt} = -MgR\sin\theta$$

Il momento angolare rispetto al polo scelto vale

$$L_O = I_{CM}\omega + MRv_x$$

e quindi otteniamo

$$I_{CM}\dot{\omega} + MR\dot{v}_x = -MgR\sin\theta \tag{1.4}$$

Per confrontare con quanto trovato precedentemente consideriamo l'equazione del moto per il centro di massa (1.1). Moltiplicandola membro a membro per R otteniamo

$$MR\dot{v}_x = F_aR + MgR\sin\theta$$

e sottraendo membro a membro alla (1.4) otteniamo nuovamente la (1.3).

Esercizio 3. Supponiamo di scegliere le condizioni iniziali in modo da avere un moto di rotolamento puro. Sotto quali condizioni si avrà rotolamento puro anche successivamente?

In questo caso le equazioni precedenti si scrivono

$$M\dot{v}_x = F_a + Mg\sin\theta \tag{1.5}$$
$$I_{CM}\dot{\omega} = F_aR \tag{1.6}$$
$$|F_a| \leq \mu_s Mg\cos\theta \tag{1.7}$$

Moltiplicando ambo i membri della prima equazione per M^{-1}, ambo i membri della seconda per RI_{CM}^{-1} e sommando membro a membro otteniamo

$$\frac{d}{dt}\left(v_x + R\omega\right) = \left(\frac{1}{M} + \frac{R^2}{I_{CM}}\right) F_a + g\sin\theta$$

e dato che inizialmente si ha rotolamento puro $v_x(0) + R\omega(0) = 0$. Se questa condizione si deve mantenere successivamente è necessario che

$$\frac{d}{dt}\left(v_x + R\omega\right) = 0$$

e quindi

$$F_a = -\frac{I_{CM}}{I_{CM} + MR^2} Mg\sin\theta$$

Sostituendo nella (1.7) troviamo

$$\frac{I_{CM}}{I_{CM} + MR^2} Mg\sin\theta \le \mu_s Mg\cos\theta$$

ossia

$$\frac{I_{CM}}{I_{CM} + MR^2} \tan\theta \le \mu_s$$

e dato che per un cilindro $I_{CM} = MR^2/2$ vediamo che il rotolamento puro può continuare solo se

$$\mu_s \ge \frac{1}{3}\tan\theta \tag{1.8}$$

Esercizio. Supponiamo adesso che inizialmente il moto del cilindro sia di pura traslazione, con velocità $v_x = V$. In quali condizioni si arriva al puro rotolamento?

Se inizialmente $v_x = V$ e $\omega = 0$ allora la velocità del punto di contatto vale

$$v_O = V > 0$$

e quindi la forza di attrito vale $F_a = -\mu_D M g \cos\theta$. Di conseguenza le equazioni del moto diventano

$$\begin{aligned} M\dot{v}_x &= -\mu_D M g \cos\theta + M g \sin\theta \\ I_{CM}\dot{\omega} &= -\mu_D M g R \cos\theta \end{aligned}$$

Si tratta di un moto uniformemente accelerato sia per il centro di massa che per l'angolo di rotazione. Possiamo trovare immediatamente le soluzioni:

$$\begin{aligned} v_x &= V + g\left(\sin\theta - \mu_D \cos\theta\right) t \\ R\omega &= -\mu_D \frac{MR^2}{I_{CM}} g t \cos\theta = -2 g t \mu_D \cos\theta \end{aligned}$$

e se costruiamo la combinazione

$$v_O = v_x + R\omega = V + g\left(\sin\theta - 3\mu_D \cos\theta\right) t$$

vediamo che quando

$$\sin\theta - 3\mu_D \cos\theta < 0 \tag{1.9}$$

il cilindro inizia un moto di rotolamento puro ($v_O = 0$) al tempo

$$t = \frac{V}{3\mu_D \cos\theta - \sin\theta}$$

Dato che la condizione (1.9) si può anche scrivere nella forma

$$\mu_D > \frac{1}{3} \tan\theta$$

e che $\mu_s > \mu_D$ questo rotolamento puro rimarrà tale anche successivamente.

2 Pendolo fisico

Un pendolo fisico è ottenuto vincolando un corpo rigido di massa M a ruotare in un piano attorno ad un punto fisso di sospensione.

Si conosce la distanza a tra il centro di massa del corpo e il punto di sospensione, ed anche il momento di inerzia I_{CM} del corpo rigido attorno ad un asse parallelo a quello di rotazione passante per il centro di massa.

Esercizio 4. Calcolare il momento di inerzia del corpo attorno all'asse passante per il punto di sospensione.

Dato che conosciamo il momento di inerzia rispetto al centro di massa e la distanza tra questo e il punto di sospensione abbiamo dal teorema di Steiner

$$I = I_{CM} + Ma^2$$

Esercizio 5. Scrivere l'equazione del moto per il pendolo.

Indicando con θ, come in Figura 2.1, l'angolo tra la verticale e il segmento congiungente il centro di massa e il punto di sospensione, possiamo scrivere la seconda equazione cardinale nella forma

$$I\ddot{\theta} = -Mga \sin\theta$$

Confrontando con l'equazione del moto di un pendolo ideale di lunghezza ℓ

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin\theta$$

vediamo che possiamo pensare al pendolo fisico come a un pendolo ideale con una "lunghezza efficace"

$$\ell_{eff} = \frac{I}{Ma}$$

Esercizio 6. Scrivere l'energia del pendolo.

Dato che conosciamo un punto fisso, possiamo scrivere l'energia cinetica come energia di pura rotazione attorno ad esso

$$E_c = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

e per quanto riguarda l'energia potenziale abbiamo

$$U = -Mga\cos\theta$$

L'energia totale è dunque

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - Mga\cos\theta$$

È interessante notare che possiamo ricavare da quest'ultima l'equazione del moto vista precedentemente. Dato che l'energia si conserva, deve essere $\dot{E} = 0$. D'altra parte

$$\dot{E} = I\dot{\theta}\ddot{\theta} + Mga\dot{\theta}\sin\theta = \dot{\theta}\left(I\ddot{\theta} + Mga\sin\theta\right) = 0$$

L'equazione precedente ci dice che l'energia si conserva in due casi:

1. Se $\dot{\theta} = 0$, cioè se il pendolo è fermo. Questo è ovvio e poco interessante.

2. Se il moto $\theta(t)$ del pendolo soddisfa l'equazione

$$I\ddot{\theta} + Mga\sin\theta = 0$$

   che in effetti è l'equazione del moto per il sistema.

Esercizio 7. Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.

L'equilibrio stabile corrisponde al minimo dell'energia potenziale, e quindi a $\theta = 0$. Per piccole oscillazioni possiamo approssimare $\sin\theta \simeq \theta$ e quindi avremo

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mga}{I}\theta$$

Questo è un oscillatore armonico con

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mga}{I}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell_{eff}}}$$

Esercizio 8. Per quale valore di a la frequenza di oscillazione è massima?

Possiamo scrivere

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mga}{I_{CM} + Ma^2}}$$

Per valori piccoli di a il numeratore diventa piccolo (il momento della forza peso è piccolo perché ha un piccolo braccio). Quindi la frequenza di oscillazione tende a zero dato che il denominatore tende alla costante finita I_{CM}. D'altra parte per valori grandi di a il denominatore cresce più rapidamente del numeratore (l'inerzia del sistema diventa molto grande) e quindi anche in questo caso la frequenza di oscillazione tende a zero.

Segue che deve esistere un valore di a che corrisponde al massimo di f. per determinarlo deriviamo l'espressione sotto radice

$$\frac{d}{da}\frac{Mga}{I_{CM} + Ma^2} = \frac{MgI_{CM} - M^2ga^2}{\left(I_{CM} + Ma^2\right)^2} = 0$$

e troviamo

$$a^* = \sqrt{\frac{I_{CM}}{M}}$$

Notare che questo corrisponde al valore minimo della lunghezza efficace del pendolo

$$\ell^*_{eff} = \frac{I_{CM} + Ma^{*2}}{Ma^*} = \sqrt{\frac{4I_{CM}}{M}}$$

e quindi alla frequenza massima

$$f^* = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{Mg^2}{4I_{CM}}\right)^{1/4}$$

Esercizio 9. Trovare la frequenza massima se il corpo rigido è un cilindro disco di raggio R e massa M.

In questo caso $I_{CM} = MR^2/2$, e per ottenere la frequenza massima si deve sospendere il disco ad una distanza ottimale

$$a^* = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

ottenendo una lunghezza efficace

$$\ell_{eff}^* = R\sqrt{2}$$

e una frequenza massima

$$f^* = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R\sqrt{2}}}$$

Notare che questa frequenza massima non dipende dalla massa.

3 Manubrio

Un manubrio, rappresentato in Figura 3.1, e costituito da due masse puntiformi m poste agli estremi di un'asta di massa trascurabile e lunghezza $2a$. L'asta è saldata nel suo punto medio ad un'asse che ruota ad una velocità angolare costante ω, e l'angolo (fisso) tra asta e asse vale θ.

Esercizio 10. Determinare l'energia cinetica del sistema.

Dato che il modulo della velocità di entrambe le masse è

$$v = a\omega \sin\theta$$

abbiamo

$$E_c = \frac{1}{2} 2ma^2\omega^2 \sin^2\theta$$

Esercizio 11. Calcolare il momento di inerzia del manubrio attorno all'asse di rotazione.

Un primo modo di procedere è il seguente: sappiamo che possiamo scrivere l'energia cinetica come energia di pura rotazione attorno ad un punto fisso del manubrio, che è ovviamente il punto di giunzione con l'asse di rotazione, nella forma

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$$

e confrontando con l'espressione precedente dell'energia troviamo

$$I = 2ma^2 \sin^2\theta$$

D'altra parte possiamo anche applicare direttamente la definizione:

$$I = \sum_i m_i d_i^2$$

sommando su tutte le masse del sistema m_i. Tenendo conto che nel nostro caso $m_1 = m_2 = m$ e che le distanze dall'asse di rotazione sono $d_1 = d_2 = a\sin\theta$ troviamo nuovamente lo stesso risultato.

Esercizio 12. Calcolare il momento angolare del manubrio rispetto al centro di massa, e dire se si conserva.

Scegliendo un sistema di riferimento con l'origine nel centro di massa del manubrio, e asse z coincidente con l'asse di rotazione, scriviamo i vettori posizione delle due masse

$$\vec{r}_1 = a \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\omega t \\ \sin\theta\sin\omega t \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

e

$$\vec{r}_2 = -a \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\omega t \\ \sin\theta\sin\omega t \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Derivando otteniamo le velocità

$$\vec{v}_1 = a\omega \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\omega t \\ \sin\theta\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\vec{v}_2 = -a\omega \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\omega t \\ \sin\theta\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il momento angolare applicando la definizione. Otteniamo

$$\vec{L} = m\vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1 + m\vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2 = 2m\vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1$$

dove l'ultima semplificazione è stata ottenuta osservando che $\vec{r}_2 = -\vec{r}_1$ e $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$: le due masse danno lo stesso contributo al momento angolare. Esplicitamente otteniamo

$$\begin{aligned}\vec{L} &= 2ma^2\omega \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \sin\theta\cos\omega t & \sin\theta\sin\omega t & \cos\theta \\ -\sin\theta\sin\omega t & \sin\theta\cos\omega t & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2ma^2\omega \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\theta\cos\omega t \\ -\sin\theta\cos\theta\sin\omega t \\ \sin^2\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Abbiamo una componente nel piano $x{-}y$ di modulo $2ma^2\omega\sin\theta\cos\theta$ che ruota con velocità angolare ω, più una componente costante in direzione z

$$L_z = 2ma^2\omega\sin^2\theta$$

Il vettore $\vec{L}$ quindi non si conserva, ma si conserva il suo modulo

$$\left|\vec{L}\right| = 2ma^2\omega\sin\theta$$

e la sua componente L_z. Notare che $\vec{L}$ è perpendicolare alla sbarra, ed il suo modulo è proporzionale alla superficie spazzata da quest'ultima nell'unità di tempo. Detto ϕ l'angolo di rotazione della sbarra abbiamo infatti

$$dS = 2\left(\frac{1}{2}\,a\;ad\phi\sin\theta\right)$$

e quindi

$$\frac{dS}{dt} = a^2\omega\sin\theta = \frac{1}{2m}\left|\vec{L}\right|$$

Esercizio 13. Calcolare il vettore momento angolare in funzione dei momenti di inerzia del manubrio rispetto agli assi principali.

Per ragioni di simmetria un asse principale del manubrio (rispetto al centro di massa) è parallelo ad esso. Il relativo momento di inerzia $I_\parallel$ è nullo, perchè le masse si trovano su di esso. Gli altri due sono perpendicolari al manubrio, e per entrambi si ha

$$I_\perp = 2ma^2$$

dato che le masse si trovano ad una distanza a da esso. Per determinare il momento angolare scomponiamo la velocità angolare lungo gli assi principali. Abbiamo

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\perp + \vec{\omega}_\parallel$$

e quindi per il momento angolare avremo

$$\begin{aligned} \vec{L} &= I_\perp \vec{\omega}_\perp + I_\parallel \vec{\omega}_\parallel \\ &= 2ma^2 \vec{\omega}_\perp \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\vec{\omega}_\perp = \hat{n}\omega \sin\theta$$

dove

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} -\cos\theta\cos\omega t \\ -\cos\theta\sin\omega t \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

è un versore perpendicolare al manubrio nel piano che contiene questo e l'asse di rotazione. Abbiamo infine

$$\vec{L} = 2ma^2\omega\sin\theta \begin{pmatrix} -\cos\theta\cos\omega t \\ -\cos\theta\sin\omega t \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

in accordo con l'espressione trovata precedentemente.

Esercizio 14. Calcolare il momento esercitato sul manubrio dalla saldatura.

Deve essere

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

e quindi

$$\vec{M} = 2ma^2\omega^2 \sin\theta \begin{pmatrix} \cos\theta \sin\omega t \\ -\cos\theta\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si può verificare che $\vec{M}$

1. ha modulo costante $\left|\vec{M}\right| = 2ma^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta$, che si annulla per $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$;
2. è perpendicolare a $\vec{L}$: per questa ragione il modulo di $\vec{L}$ si conserva;
3. è perpendicolare anche all'asta, e di conseguenza è perpendicolare al piano che contiene quest'ultima e il manubrio;

4 Oscillazioni di una trave

Una sbarra di lunghezza ℓ e massa m è appoggiata su due rulli di raggio ρ che ruotano con velocità angolare costante $-\omega_0$ e ω_0 attorno al loro asse, come in Figura 4.1. La distanza tra i rulli è $2a < \ell$ e tra essi e la sbarra c'è attrito, descritto da coefficienti μ_s e μ_d (gli stessi per entrambi i rulli).

Esercizio 15. Supponendo la velocità della sbarra piccola in modulo rispetto a $|\rho\omega_0|$ Scrivere l'equazione del moto per il movimento orizzontale della sbarra e studiare la possibilità di soluzioni oscillatorie.

Scriviamo anzitutto le equazioni del moto. L'accelerazione verticale della sbarra è nulla, quindi

$$N_1 + N_2 - mg = 0$$

dove N_1 e N_2 sono le reazioni normali dei cilindri. deve essere nullo non ruota, e quindi il momento totale applicato ad essa deve essere nullo. Calcolando i momenti rispetto al centro di massa della sbarra abbiamo

$$-N_1 (a+x) + N_2 (a-x) = 0$$

dove x è lo spostamento del centro di massa della sbarra rispetto al punto intermedio tra i due contatti. Risolvendo otteniamo

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{mg}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right) \\ N_2 &= \frac{mg}{2}\left(1+\frac{x}{a}\right) . \end{aligned}$$

Scriviamo adesso l'equazione per il moto orizzontale della sbarra. Tenendo conto che la velocità della sbarra non supera mai in modulo quella del rullo al punto di contatto possiamo scrivere per $\omega_0 > 0$

$$m\ddot{x} = \mu_d (N_1 - N_2) = -\frac{\mu_d m g}{a} x$$

che descrive una oscillazione armonica di periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{\mu_d g}} .$$

Nel caso $\omega_0 < 0$ abbiamo invece

$$m\ddot{x} = -\mu_d (N_1 - N_2) = \frac{\mu_d m g}{a} x$$

che descrive una soluzione del tipo

$$x = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}$$

con

$$\Omega = \sqrt{\frac{\mu_d g}{a}} .$$

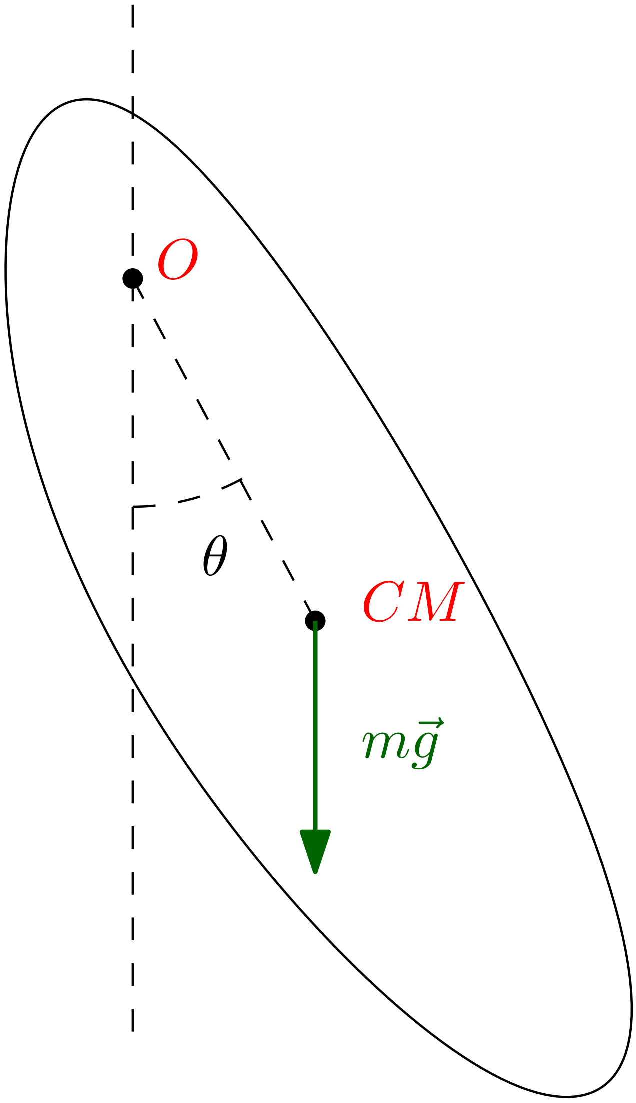

Figura 2.1: Il pendolo fisico. Il punto di sospensione è O, il centro di massa CM. La forza peso è indicata con dal vettore verde.

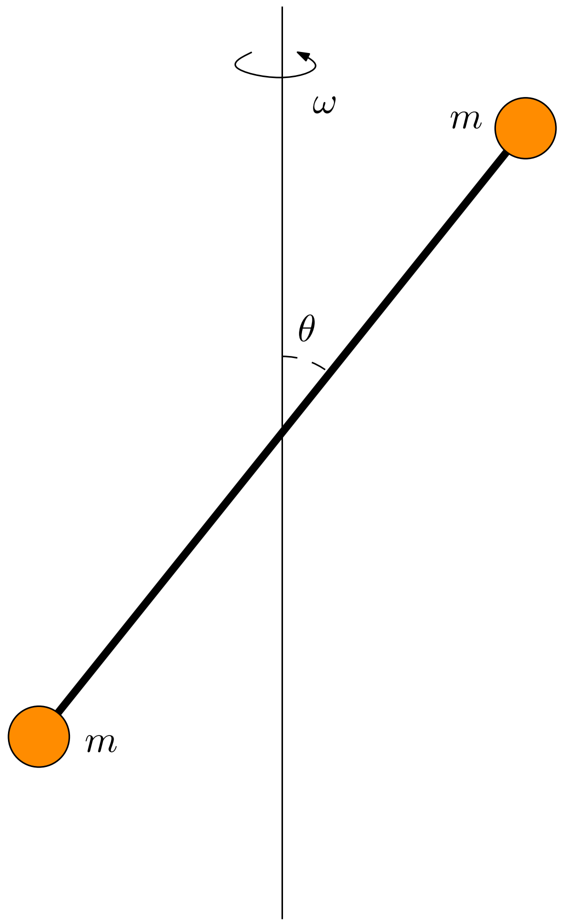

Figura 3.1: Il manubrio considerato nell'esercizio. Le masse sono puntiformi, e l'angolo θ è fissato.

Figura 4.1: La sbarra appoggiata sui due rulli. È indicato il verso di rotazione che produce una oscillazione.