0.1. Problema a tre corpi ristretto

Consideriamo due stelle di massa M_1 ed M_2 in orbita attorno al centro di massa comune. La velocità angolare del sistema si trova facilmente dall'equazione del moto radiale per il moto relativo:

$$\mu a \omega^2 = \frac{G M_1 M_2}{a^2}$$

da cui

$$\omega^2 = \frac{G\left(M_1 + M_2\right)}{a^3}$$

Nel sistema rotante il potenziale gravitazionale delle due stelle si può scrivere

$$\phi\left(x, y, z\right) = -\frac{G M_1}{\sqrt{\left(x - \frac{\mu a}{M_1}\right)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{G M_2}{\sqrt{\left(x + \frac{\mu a}{M_2}\right)^2 + y^2 + z^2}}$$

Con una traslazione

$$x' = x + \frac{\mu a}{M_2}$$

$$\phi\left(x, y, z\right) = -\frac{G M_1}{\sqrt{\left(x' - a\right)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{G M_2}{\sqrt{x'^2 + y^2 + z^2}}$$

Consideriamo adesso una particella di prova. La sua energia cinetica in un sistema inerziale sarà

$$T = \frac{1}{2} m \frac{d\vec{R}}{dt} \cdot \frac{d\vec{R}}{dt}$$

Il vettore $\vec{R}$ è legato alle coordinate inerziali da

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ X \end{pmatrix}$$

ed è legato da

$$\vec{r} = \mathbb{R}\vec{R}$$

alle coordinate nel sistema rotante

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

dove $\mathbb{R}$ è una matrice di rotazione della forma

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo allora scrivere

$$\vec{v} = \frac{d\mathbb{R}}{dt}\vec{R} + \mathbb{R}\vec{V}$$

e quindi

$$\vec{V} = \mathbb{R}^T\vec{v} - \mathbb{R}^T\frac{d\mathbb{R}}{dt}\mathbb{R}^T\vec{r}$$

Ora,

$$\frac{d\mathbb{R}}{dt}\mathbb{R}^T\vec{r} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

e quindi

$$\vec{V} = \mathbb{R}^T\vec{v} - \mathbb{R}^T\vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Sostituendo nell'energia cinetica troviamo

$$T = \frac{1}{2}m\left[v^2 + (\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2 - 2\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r})\right]$$

La Lagrangiana per la particella di prova nel sistema rotante sarà dunque

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_m &= \frac{1}{2}m\left[v^2 - 2\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r})\right] - m\phi(\vec{r}) + \frac{1}{2}m(\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2 \\
&= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - m\omega(\dot{x}y - \dot{y}x) - m\phi(\vec{r}) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 + y^2\right)
\end{aligned}$$

Con la traslazione precedente il potenziale centrifugo vale

$$\frac{1}{2}m\omega^2\left[\left(x' - \frac{\mu a}{M_2}\right)^2 + y^2\right]$$

Il secondo termine è legato alla forza di Coriolis, in quarto a quella centrifuga.

Determiniamo nel piano xy i punti stazionari del potenziale efficace, che corrispondono a posizioni di equilibrio per la massa di test. Consideriamo il solo caso $M_1 = M_2$

$$\begin{aligned}
\phi_{eff} &= GM\left\{-\frac{1}{2}K\left(x^2 + y^2\right) + \frac{1}{\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}}\right\} \\
K &= \frac{\omega^2}{GM}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi_{eff}}{\partial x} &= GM\left[Kx + \frac{x - \frac{a}{2}}{\left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2\right]^{3/2}} + \frac{x + \frac{a}{2}}{\left[\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2\right]^{3/2}}\right] \\
\frac{\partial\phi_{eff}}{\partial x} &= GM\left[Ky + \frac{y}{\left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2\right]^{3/2}} + \frac{y}{\left[\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2\right]^{3/2}}\right]
\end{aligned}$$

Sull'asse $y = 0$ la seconda derivata si annulla identicamente, la prima se

$$Kx + \frac{x - \frac{a}{2}}{\left|x - \frac{a}{2}\right|^3} + \frac{x + \frac{a}{2}}{\left|x + \frac{a}{2}\right|^3} = 0$$

Se $x > a/2$

$$Kx + \frac{1}{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2} = 0$$

per $-a/2 < x < a/2$

$$Kx - \frac{1}{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2} = 0$$

e per $x < -a/2$

$$Kx - \frac{1}{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2} = 0$$