1.1. 11 settembre 2008

Problema 1 (15 punti)

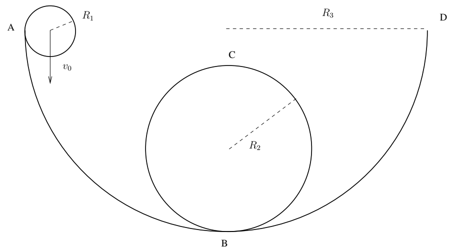

Figura 1.1.: La guida composta dai tratti $A-B$, $B-C$, $C-B$ e $B-D$.

La guida in Figura 1.1 è formata da settori di circonferenza, di raggio R_2 e $R_3 > R_2$ come in figura, che sono collegati nella sequenza $A-B$, $B-C$, $C-B$ e $B-D$. Un disco di raggio $R_1 < R_2$ e massa m rotola senza strisciare sulla guida, partendo dal punto A con velocità del centro di massa $v_{cm} = v_0$.

1. Calcolare in modulo, direzione e verso la reazione vincolare della guida immediatamente prima e immediatamente dopo il primo passaggio per il punto B e dire se essa è impulsiva al momento del passaggio.
2. Ponendo $v_0 = 0$ determinare il massimo valore di R_2 per il quale la guida viene percorsa completamente, considerando il vincolo monolatero.
3. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno al punto B.

Problema 2 (15 punti)

Il recipiente in Figura 1.2 è chiuso da un setto scorrevole $\mathcal{S}$. Recipiente e setto sono impermeabili al calore, ed il setto ha massa trascurabile. Il volume interno è ulteriormente diviso in due parti da una parete rigida, che permette invece il contatto termico tra le due parti. Nella parte inferiore si trova una massa M di ghiaccio a $0\,°C$, in quella superiore n moli di un gas perfetto. L'esterno del recipiente si trova a pressione atmosferica.

1. Determinare il volume V del gas nella condizione iniziale.
2. Si comprime adesso il setto superiore fino a portare la temperatura del gas a $20\,°C$ in modo reversibile. Determinare la dipendenza della pressione del gas dal suo volume per questa trasformazione, e rappresentarla su un grafico. Di quanto è variata l'entropia del sistema?
3. Supponendo di utilizzare il sistema come sorgente fredda, e che l'ambiente esterno possa essere considerato un bagno termico a temperatura $T = 20\,°C$, trasferendo calore mediante una macchina termica, determinare il massimo lavoro estraibile.

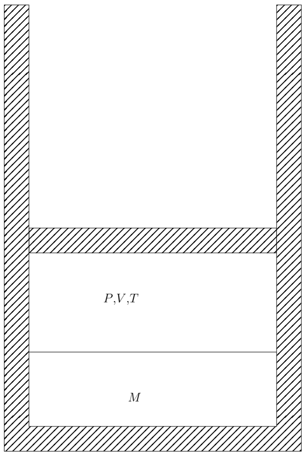

Figura 1.2.:

Soluzione primo problema

Domanda 1

Dato che l'energia totale si conserva

$$E = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + mgz \tag{1.1.1}$$

e che velocità del centro di massa e velocità angolare del disco sono legate da $v_{cm} = -R_1\omega$ segue che

$$E = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I_{cm}}{R_1^2}\right)v_{cm}^2 + mgz = \frac{3}{4}mv_{cm}^2 + mgz \tag{1.1.2}$$

Questo significa che la velocità del centro di massa dipende solo dalla sua posizione z. Quindi immediatamente prima e immediatamente dopo B v_{cm} non sarà cambiata (nemmeno in direzione, dato che sarà sempre orizzontale) e quindi non è presente nessuna forza impulsiva.

Il centro di massa percorre una traiettoria circolare, per cui immediatamente prima di B sarà

$$m\frac{v_{cm}^2}{R_3 - R_1} = N - mg \tag{1.1.3}$$

e immediatamente dopo

$$m\frac{v_{cm}^2}{R_2 - R_1} = N - mg \tag{1.1.4}$$

da cui si deduce che la reazione normale della guida è diversa.

Si può osservare che in B l'accelerazione tangenziale del centro di massa è nulla: questo si ricava direttamente scrivendo l'energia nella forma

$$E = \frac{3}{4}m\left(R_3 - R_1\right)^2\dot{\theta}^2 + mg\left(R_3 - R_1\right)\left(1 - \cos\theta\right) \tag{1.1.5}$$

valida prima di B e derivando rispetto al tempo

$$\dot{E} = \frac{3}{2}m\left(R_3 - R_1\right)^2 \dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\left(R_3 - R_1\right)\dot{\theta}\sin\theta = 0 \tag{1.1.6}$$

si ottengono le equazioni del moto

$$\frac{3}{2}m\left(R_3 - R_1\right)^2 \ddot{\theta} + mg\left(R_3 - R_1\right)\sin\theta = 0 \tag{1.1.7}$$

che permettono di concludere $\ddot{\theta} = 0$ in $\theta = 0$. Analogamente si può derivare l'equazione del moto valida dopo B

$$\frac{3}{2}m\left(R_2 - R_1\right)^2 \ddot{\theta} + mg\left(R_2 - R_1\right)\sin\theta = 0 \tag{1.1.8}$$

in entrambi i casi si è utilizzata come coordinata l'angolo tra la direzione verticale e la normale alla guida.

Dato che non c'è accelerazione tangenziale, non si avranno forze orizzontali, e la reazione ha la sola componente normale discontinua calcolata precedentemente.

Domanda 2

La velocità nel punto C si calcola dalla conservazione dell'energia:

$$mgR_3 = \frac{3}{4}mv_{cm}^2 + mg\left(2R_2 - R_1\right) \tag{1.1.9}$$

da cui

$$v_{cm}^2 = \frac{4}{3}g\left(R_1 + R_3 - 2R_2\right) \tag{1.1.10}$$

ma per poter passare deve essere

$$m\frac{v_{cm}^2}{\left(R_2 - R_1\right)} \geq mg \tag{1.1.11}$$

da cui

$$\frac{4}{3}\left(R_1 + R_3 - 2R_2\right) \geq \left(R_2 - R_1\right) \tag{1.1.12}$$

e quindi

$$R_2 \leq \frac{7R_1 + 4R_3}{11} \tag{1.1.13}$$

Domanda 3

Il periodo è la somma di un semiperiodo a sinistra di B più un semiperiodo a destra. Il primo è determinato dalla equazione del moto scritta in precedenza, sviluppata per piccole oscillazioni:

$$\frac{3}{2}m\left(R_3 - R_1\right)^2 \ddot{\theta} + mg\left(R_3 - R_1\right)\theta = 0 \tag{1.1.14}$$

da cui

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{3\left(R_3 - R_1\right)}{2g}} \tag{1.1.15}$$

e analogamente la seconda

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{3\left(R_2 - R_1\right)}{2g}} \tag{1.1.16}$$

quindi

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} = \pi\sqrt{\frac{3}{2g}}\left(\sqrt{R_3 - R_1} + \sqrt{R_2 - R_1}\right) \tag{1.1.17}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che il gas è in equilibrio termico con il ghiaccio deve essere

$$P_{atm}V_0 = nRT_0 \tag{1.1.18}$$

dove $T_0 = 0\,°C$, da cui

$$V = V_0 = \frac{nRT_0}{P_{atm}} \tag{1.1.19}$$

Domanda 2

Finchè del ghiaccio è presente, la temperatura del sistema è fissata a T_0. Quindi

$$P = \frac{nRT_0}{V} \tag{1.1.20}$$

Dal primo principio segue che

$$\delta Q = 0 = \lambda dm + PdV \tag{1.1.21}$$

dove dm è la massa di ghiaccio che si scioglie e λ il calore latente di fusione. Segue che

$$nRT_0\frac{dV}{V} + \lambda dm \tag{1.1.22}$$

e quindi quando tutto il ghiaccio si è sciolto il volume è diventato

$$V_1 = V_0 \exp\left(-\frac{\lambda M}{nRT_0}\right) \tag{1.1.23}$$

Da questo momento in poi vale

$$\delta Q = 0 = \left(C + nc_V\right) dT + PdV \tag{1.1.24}$$

dove C è la capacità termica dell'acqua. Abbiamo quindi

$$(C + nc_V) \int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V} nR \frac{dV}{V} = 0 \tag{1.1.25}$$

ossia

$$(C + nc_V) \log \frac{T}{T_0} + nR \log \frac{V}{V_1} = 0 \tag{1.1.26}$$

che si può esprimere nella forma

$$V^{nR} T^{C+nc_V} = \text{cost} \tag{1.1.27}$$

oppure

$$PV^{\beta} = \text{cost} \tag{1.1.28}$$

dove

$$\beta = \frac{c_P + C/n}{c_V + C/n} \tag{1.1.29}$$

Quindi la trasformazione si rappresenta come una isoterma per $V_1 < V < V_0$, e come una adiabatica con un esponente modificato per $V_f < V < V_1$. Il volume finale si ottiene dalla (1.1.27):

$$V_f = V_1 \left(\frac{T_0}{T_f} \right)^{\frac{C+nc_V}{nR}} \tag{1.1.30}$$

con $T_f = 20\,^{\circ}C$.

Dato che il sistema non scambia calore con l'esterno la sua variazione di entropia è nulla.

Domanda 3

Sia δQ_1 il calore assorbito dall'ambiente e δQ_2 quello ceduto al sistema. Chiaramente $W = Q_1 - Q_2$. Fino a quando è presente del ghiaccio le temperature sono fissate, e dato che l'entropia totale non varia deve essere

$$\frac{Q_2}{T_0} = \frac{Q_1}{T_f} \tag{1.1.31}$$

e d'altra parte $Q_2 = \lambda M$, quindi

$$W = \left(\frac{T_f}{T_0} - 1 \right) \lambda M \tag{1.1.32}$$

sarà il lavoro prodotto in questa prima fase.

Appena tutto il ghiaccio si è sciolto deve essere

$$\delta Q_2 = (C + nc_V)\, dT + P dV \tag{1.1.33}$$

$$dS = (C + nc_V)\,\frac{dT}{T} + \frac{P}{T}dV - \frac{\delta Q_1}{T_f} = 0 \tag{1.1.34}$$

Integrando la seconda relazione otteniamo, tenendo conto che la pressione è costante

$$Q_1 = T_f\,(C + nc_V + nR)\log\frac{T_f}{T_0} \tag{1.1.35}$$

e dalla prima

$$Q_2 = (C + nc_V + nR)\,(T_f - T_0) \tag{1.1.36}$$

da cui otteniamo il risultato finale

$$W = \left(\frac{T_f}{T_0} - 1\right)\lambda M + (C + nc_P)\left[T_f\log\frac{T_f}{T_0} - (T_f - T_0)\right] \tag{1.1.37}$$