1.11. 8 febbraio 2012

Problema 1 (15 punti)

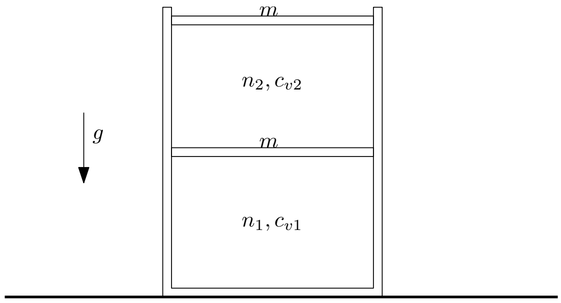
Una particella di massa m si muove in un piano sottoposta ad una forza

$$\vec{F} = A(r)\vec{r}$$

dove $\vec{r}$ è il vettore posizione della particella, r il suo modulo e $A(r)$ una funzione incognita. Si sa che sono possibili orbite circolari di raggio qualsiasi, e che tutte corrispondono allo stesso valore L_0 del modulo del momento angolare.

1. Determinare $A(r)$.
2. Determinare due costanti del moto e scriverle usando opportune coordinate (si consigliano coordinate polari).
3. Discutere le caratteristiche delle possibili traiettorie della particella. Se, in particolare, esistono delle traiettorie che portano la particella a cadere sul centro, dire se tale caduta avviene in un tempo finito.

Problema 2 (15 punti)



Il recipiente in figura di sezione S è diviso in due parti da due setti scorrevoli di massa m. I due volumi sono occupati da una mole di un gas perfetto monoatomico. Il setto superiore è impermeabile al calore, ed il sistema si trova inizialmente all'equilibrio (la pressione esterna è trascurabile) con entrambi i gas ad una temperatura T_0.

1. Determinare pressioni e volumi dei due gas nello stato iniziale.
2. Anche il setto intermedio è impermeabile al calore, e si agisce su quello superiore fino a raddoppiare la pressione del gas nello scomparto superiore. Calcolare le nuove temperature dei due gas e dire di quanto è variata l'entropia del sistema.
3. Si permette adesso il passaggio di calore attraverso il setto intermedio, mantenendo bloccato quello superiore. Determinare la temperatura finale, e dire se è maggiore o minore di T_0. C'è stata variazione di entropia?

Soluzione primo problema

Domanda 1

In un'orbita circolare

$$-m\frac{v^2}{r} = A(r)r$$

e d'altra parte

$$L_0 = mvr$$

Sostituendo otteniamo

$$-\frac{L_0^2}{mr^3} = A(r)r$$

e quindi

$$A(r) = -\frac{L_0^2}{mr^4}$$

Domanda 2

L'energia e il momento angolare si conservano:

$$\begin{aligned} L &= mr^2\dot{\theta} \\ E &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{L_0^2}{2mr^2} \end{aligned}$$

L'energia potenziale è stata determinata integrando la relazione

$$-\frac{L_0^2}{mr^3} = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

da cui

$$U(r) = -\frac{L_0^2}{2mr^2}$$

Domanda 3

Il potenziale efficace vale

$$U_{eff} = \frac{L^2 - L_0^2}{2mr^2}$$

e dal suo studio vediamo che per $L^2 > L_0^2$ tutte le orbite sono illimitate. Per $L^2 < L_0^2$ le orbite che corrispondono ad un'energia negativa terminano sono limitate e terminano nel centro. Se invece $E \geq 0$ l'orbita può condurre la particella nel centro o farla sfuggire a $r \to \infty$ a seconda del segno della velocità radiale iniziale. Il caso $L^2 = L_0^2$ è particolare. Il moto radiale è del tipo

$$r(t) = r_0 + v_0 t$$

che corrisponde a una caduta nel centro per $v_0 < 0$, ad un'orbita illimitata per $v_0 > 0$ e a un'orbita circolare per $v_0 = 0$.

Il tempo necessario per la caduta nel centro si può determinare a partire dall'energia, scritta come

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2 - L_0^2}{2mr^2}$$

e quindi

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{L_0^2 - L^2}{2mr^2}\right)}$$

Possiamo integrare questa equazione differenziale ed ottenere il tempo di caduta da una distanza iniziale r_0

$$\tau = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{L_0^2 - L^2}{2mr^2}\right)}}$$

L'integrale si calcola esplicitamente, ma è sufficiente notare che è finito, ricordando che siamo interessati al caso $L_0^2 > L^2$.

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Imponendo l'equilibrio meccanico abbiamo

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{2mg}{S} \\ P_2 &= \frac{mg}{S} \end{aligned}$$

e dalla legge dei gas perfetti otteniamo

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{RT_0}{P_1} = \frac{RT_0 S}{2mg} \\ V_2 &= \frac{RT_0}{P_2} = \frac{RT_0 S}{mg} \end{aligned}$$

Domanda 2

La trasformazione dei due gas è adiabatica, quindi l'entropia non cambia. Per quanto riguarda le temperature abbiamo ($c_v = 3/2R$, $c_p = 5/2R$, $\gamma = c_p/c_V = 5/3$)

$$\begin{aligned} T_1 P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} &= T_0 P_{10}^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ T_2 P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} &= T_0 P_{20}^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \end{aligned}$$

Sappiamo che $P_2 = 2mg/S$ e $P_1 = 3mg/S$, quindi

$$\begin{aligned} T_1 &= T_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ T_2 &= T_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \end{aligned}$$

Domanda 3

L'energia del sistema

$$E = c_v \left(T_1 + T_2\right) + mg\frac{V_1}{S} + mg\left(\frac{V_1 + V_2}{S}\right)$$

si conserva perchè durante l'evoluzione del sistema non ci sono forze esterne che fanno lavoro sul sistema. Inoltre il volume totale $V_{tot} = V_1 + V_2$ non cambia. Abbiamo quindi

$$2c_v T_f + mg\frac{V_{1f}}{S} = c_v T_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + c_v T_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + \frac{R}{3} T_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = kRT_0$$

dove per brevità abbiamo posto

$$\begin{aligned} kR &= c_v \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + c_v \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + \frac{R}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ &= R\left[\frac{11}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right] \end{aligned}$$

Dall'equilibrio meccanico tra i due scomparti otteniamo

$$\frac{RT_f}{V_{1f}} = \frac{RT_f}{\left(V_{tot} - V_{1f}\right)} + \frac{mg}{S}$$

da cui

$$\left(V_{tot} - 2V_{1f}\right) T_f = \frac{mg}{RS} V_{1f} \left(V_{tot} - V_{1f}\right)$$

Sostituendo il volume ricavato dalla prima equazione otteniamo un'equazione di secondo grado in T_f

$$R\left(V_{tot} - \frac{2S}{mg}kRT_0 + \frac{4S}{mg}c_v T_f\right) T_f = \left(kRT_0 - 2c_v T_f\right)\left(V_{tot} - \frac{S}{mg}kRT_0 + 2\frac{S}{mg}c_v T_f\right)$$

Ricordando che

$$V_{tot} = \frac{3}{2}\frac{RT_0 S}{mg}$$

possiamo riscrivere quest'ultima come

$$30R^2T_f^2 - 4(3-4k)R^2T_0T_f + k(2k-3)R^2T_0^2 = 0$$

la cui unica soluzione accettabile (perchè maggiore di T_0) è

$$T_f = \frac{1}{30}\left(\sqrt{4k^2-6k+36}+8k-6\right)T_0 \simeq 1.34T_0$$