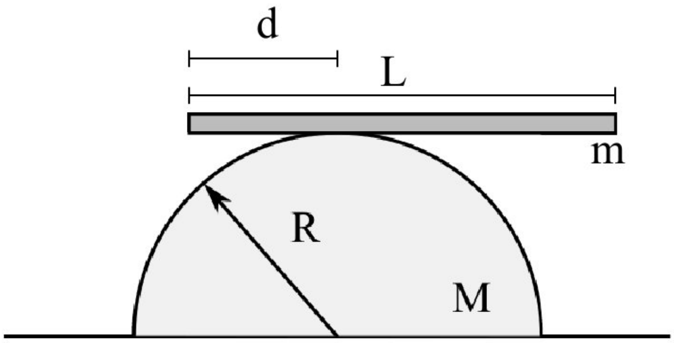
1.12. 1 giugno 2012

Problema 1 (15 punti)



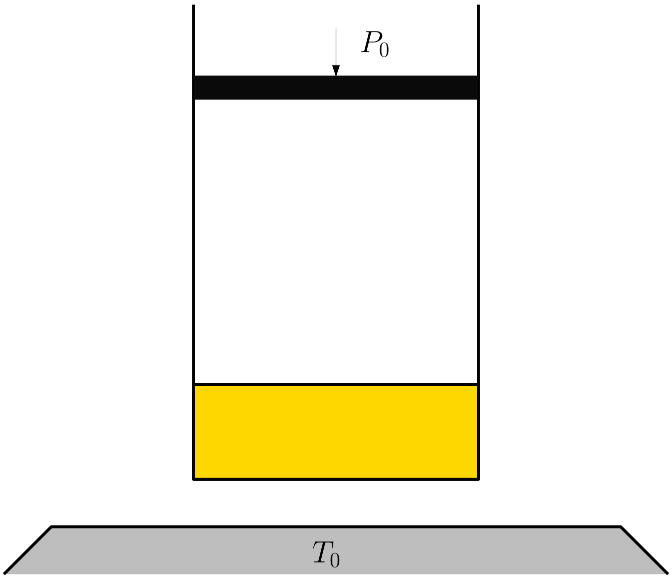
Una sbarra omogenea di lunghezza L e massa m è inizialmente appoggiata orizzontalmente su un semi-cilindro di raggio R e massa M, come in figura. La distanza del punto iniziale di appoggio dal bordo della sbarra è d. La sbarra si muove senza strisciare sul semi-cilindro. Si assuma che la sbarra non si stacchi mai dal cilindro.

1. Nell'ipotesi che il semi-cilindro sia mantenuto fermo, trovare per quale angolo di inclinazione rispetto all'orizzontale diverso da $\pm\pi/2$ la sbarra è in una posizione di equilibrio.

2. Calcolare la frequenza della piccole oscillazioni della sbarra attorno alla posizione trovata al punto precedente, limitandosi al caso $d = L/2$.

3. Supponendo adesso che $d = L/2 = \pi R/2$, se la sbarra si trova nella posizione di equilibrio con una data velocità angolare ω, per quale valore minimo di quest'ultima un suo estremo arriva a toccare terra?

Problema 2 (15 punti)



Un recipiente impermeabile al calore contiene una mole di un gas perfetto monoatomico, e un corpo di capacità termica C costante. Il recipiente è chiuso da un pistone scorrevole, pure impermeabile al calore. Si può trascurare la variazione di volume del corpo.

1. Mostrare che in una compressione reversibile del sistema la pressione e il volume occupato dal gas sono legati dalla relazione PV^k = costante, e determinare la costante k.

2. Mantenendo $PV^{5/3}$ = costante si misura la capacità termica C^* del sistema. Determinare C^*.

3. Supponendo adesso di avere a disposizione un bagno termico a temperatura T_0, che la temperatura iniziale del gas sia $T_1 > T_0$ e che la pressione sia mantenuta costante a P_0 determinare il massimo lavoro che è possibile ottenere dal sistema.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Per avere equilibrio è necessario che i momenti delle forze esterne che agiscono sulla sbarra rispetto ad un polo si annullino. Abbiamo due forze esterne, la forza di gravità applicata al centro di massa e la reazione vincolare del semi-cilindro applicata al punto di contatto. Scegliendo il polo nel punto di contatto vediamo che l'unica forza che può avere momento è quella di gravità. Tale momento sarà nullo quando il centro di massa si troverà sulla verticale del punto di contatto. Ciò acccade quando la sbarra (di spessore trascurabile) è verticale oppure quando il centro di massa coincide col punto di contatto.

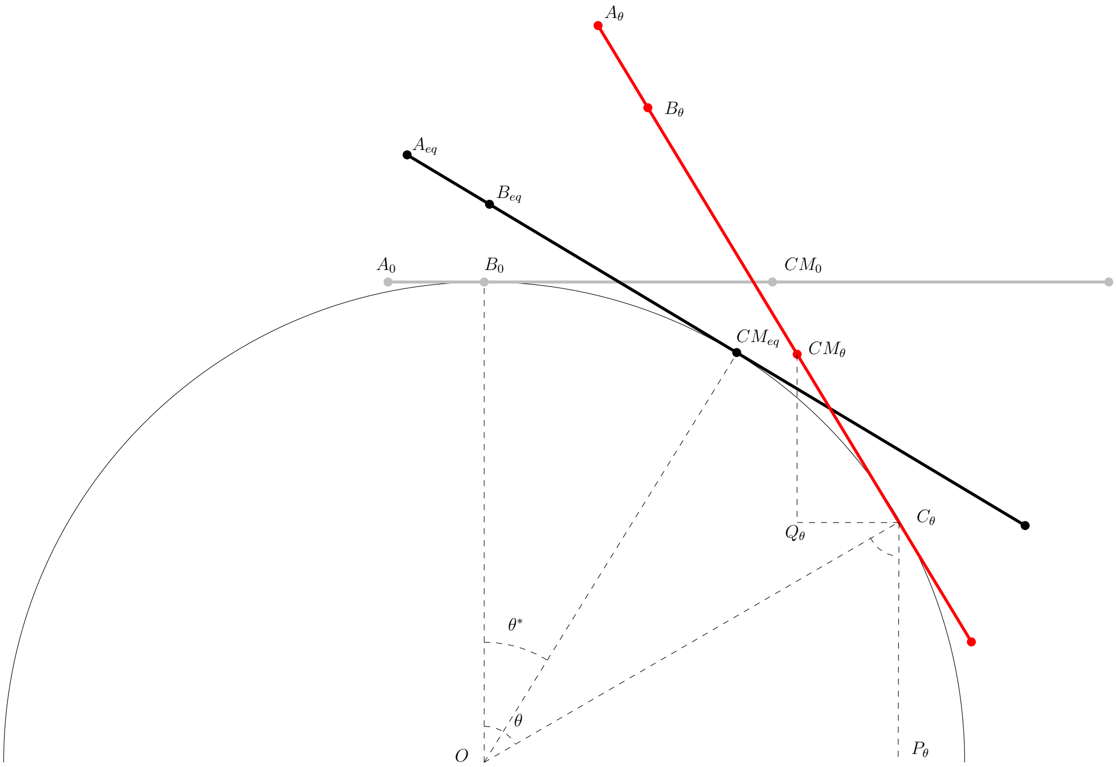


Figura 1.5.: Costruzioni geometriche utili per la soluzione dell'esercizio. La sbarra in grigio è quella nella posizione iniziale, quella nera alla posizione di equilibrio e quella rossa è in una posizione corrispondente ad un generico angolo θ.

Ci interessa solo quest'ultimo caso (gli altri corrispondono a $\theta = \pm\pi/2$). Allora la sbarra dovrà aver ruotato di un angolo corrispondente ad un arco lungo quanto la separazione iniziale tra il centro di massa e il punto di appoggio, cioè (vedere Figura 1.5)

$$R\theta^* = \overline{B_{eq}CM_{eq}} = \overline{B_0CM_0} = \frac{L}{2} - d \tag{1.12.1}$$

da cui

$$\boxed{\theta^* = \frac{L-2d}{2R}} \tag{1.12.2}$$

Si può arrivare ad una identica conclusione minimizzando l'energia potenziale

$$U = mgy_{CM}$$

Dalla Figura 1.5 vediamo che deve essere

$$y_{CM} = \overline{P_\theta C_\theta} + \overline{Q_\theta CM_\theta}$$

ma
$$\overline{P_\theta C_\theta} = R\cos\theta$$
e
$$\begin{aligned}
\overline{Q_\theta CM_\theta} &= \overline{C_\theta CM_\theta}\sin\theta \\
\overline{C_\theta CM_\theta} &= \overline{B_\theta C_\theta} - \overline{B_\theta CM_\theta} = R\theta - \overline{B_0 CM_0} = R\theta - \frac{L}{2} + d
\end{aligned}$$
da cui
$$y_{CM} = R\cos\theta + \left(\frac{L}{2} - d + R\theta\right)\sin\theta$$
Cerchiamo il mimimo:
$$\begin{aligned}
\frac{1}{mg}\frac{dU}{d\theta} &= -R\sin\theta + \left(\frac{L}{2} - d + R\theta\right)\cos\theta + R\sin\theta \\
&= \left(\frac{L}{2} - d + R\theta\right)\cos\theta
\end{aligned}$$
che si annulla per $\theta = \pm\pi/2$, corrispondenti ad una posizione verticale, e per
$$\theta = \theta^* = \frac{2d - L}{2R}$$
che corrisponde al caso in cui il centro di massa è a contatto con il semi-cilindro. Derivando ancora abbiamo
$$\frac{1}{mg}\frac{d^2U}{d\theta^2} = R\cos\theta - \left(\frac{L}{2} - d + R\theta\right)\sin\theta$$
che per $\theta = \theta^*$ vale
$$\frac{1}{mg}\frac{d^2U}{d\theta^2} = R\cos\theta^* > 0$$
Quindi $\theta = \theta^*$ corrisponde ad una posizione di equilibrio stabile.

Domanda 2

Scriviamo l'energia cinetica della sbarra. Potremmo usare subito il fatto che per piccole oscillazioni il moto può essere descritto come una pura rotazione attorno al centro di massa appoggiato al semi-cilindro. Abbiamo allora
$$K = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$
e nell'approssimazione voluta dato che $\dot{\theta}^2$ è già del secondo ordine possiamo usare $I = I_{CM} = ML^2/12$. Per quanto riguarda l'energia potenziale possiamo usare l'espressione

calcolata precedentemente nel caso particolare $d = L/2$ ottenendo infine

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\frac{ML^2}{12}\dot{\theta}^2 + MgR\left(\cos\theta + \theta\sin\theta\right) \\ &\simeq \frac{1}{2}\frac{ML^2}{12}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MgR\theta^2 \end{aligned}$$

La seconda espressione vale per piccole oscillazioni (a meno di una costante) e corrisponde ad un oscillatore armonico di frequenza

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{12gR}{L^2}}} \tag{1.12.3}$$

Verifichiamo procedendo in altro modo il risultato. Per generalità considereremo un valore generico di d. Possiamo scrivere la coordinata x del centro di massa

$$x_{cm} = -R\sin\theta + \left(\frac{L}{2} - d + R\theta\right)\cos\theta$$

e quindi

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cm} &= -\dot{\theta}\left(\frac{L}{2} - d + R\theta\right)\sin\theta \\ \dot{y}_{cm} &= \dot{\theta}\left(\frac{L}{2} - d + R\theta\right)\cos\theta \end{aligned}$$

Scriviamo l'energia cinetica come energia del centro di massa più energia di rotazione attorno ad esso,

$$K = \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2} - d + R\theta\right)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}mL^2\dot{\theta}^2$$

Per $\theta = \theta^* + \epsilon$ questo diventa tenendo solo i termini del secondo ordine in ϵ, $\dot{\epsilon}$ ($\dot{\theta} = \dot{\epsilon}$)

$$K \simeq K = \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2} - d + R\theta^* + R\epsilon\right)^2\dot{\epsilon}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}mL^2\dot{\epsilon}^2 \simeq \frac{1}{12}mL^2\dot{\epsilon}^2$$

ed effettivamente possiamo considerare il centro di massa un punto fisso. Per quanto riguarda l'energia potenziale possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{1}{mg}U &= R\cos\left(\theta^* + \epsilon\right) + \left(\frac{L}{2} - d + R\theta^* + R\epsilon\right)\sin\left(\theta^* + \epsilon\right) \\ &= R\cos\left(\theta^* + \epsilon\right) + R\epsilon\sin\left(\theta^* + \epsilon\right) \\ &\simeq R\cos\theta^* - R\epsilon\sin\theta^* - \frac{1}{2}R\epsilon^2\cos\theta^* + R\epsilon\sin\theta^* + R\epsilon^2\cos\theta^* \\ &= R\cos\theta^* + \frac{1}{2}R\epsilon^2\cos\theta^* \end{aligned}$$

Quindi
$$E \simeq \frac{1}{2}\frac{1}{12}mL^2\dot{\epsilon}^2 + \frac{1}{2}mgR\epsilon^2\cos\theta^*$$
e la frequenza delle piccole oscillazioni vale
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{12gR\cos\theta^*}{L^2}}$$
Per $d = L/2$ (e quindi $\theta^* = 0$) questo si riduce al risultato precedente.

Domanda 3

Usando la conservazione dell'energia abbiamo inizialmente
$$E = \frac{1}{2}\frac{1}{12}mL^2\omega^2 + mgR$$
Quando un estremo della sbarra tocca terra questa si trova in posizione verticale, quindi
$$E = mg\frac{\pi}{2}R$$
di conseguenza dovremo avere
$$\omega > \sqrt{\frac{24gR}{L^2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)} = \sqrt{\frac{24g}{\pi^2 R}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che non si ha scambio di calore con l'esterno avremo
$$dQ = (c_V + C)\,dT + PdV = 0$$
e quindi
$$(c_V + C)\frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V} = 0$$
Integrando otteniamo
$$TV^{\frac{R}{C+c_V}} = \text{costante}$$
ossia
$$PV^{\frac{C+c_P}{C+c_V}} = \text{costante}$$
e quindi
$$k = \frac{C+c_P}{C+c_V}$$

Domanda 2

Abbiamo adesso

$$dQ = (c_V + C)\, dT + RT\frac{dV}{V} = 0$$

Dato che $PV^{5/3}$ è costante deve anche essere

$$TV^{2/3} = \text{costante}$$

ossia

$$V^{2/3} dT + \frac{2}{3} T V^{-1/3} dV = 0$$

Da questo segue che

$$\frac{dV}{V} = -\frac{3}{2}\frac{dT}{T}$$

e quindi

$$dQ = \left(c_V + C - \frac{3}{2}R\right) dT = C dT$$

Di conseguenza $C^* = C$. Allo stesso risultato si poteva arrivare direttamente osservando che $\gamma = 5/3$ per un gas monoatomico. Di conseguenza la trasformazione del gas è adiabatica, e tutto il calore viene scambiato con il corpo.

Domanda 3

Detto dQ_1 il calore estratto dal sistema e dQ_2 quello estratto dal bagno termico avremo

$$dQ_1 = -(c_p + C)\, dT_1$$

Inoltre

$$dW = dQ_1 + dQ_2 = -(c_p + C)\, dT_1 + dQ_2$$

Per rendere massimo il lavoro dobbiamo operare in maniera reversibile, quindi

$$\begin{aligned} dS &= -\frac{dQ_1}{T_1} - \frac{dQ_2}{T_0} \\ &= (c_p + C)\frac{dT_1}{T_1} - \frac{dQ_2}{T_0} = 0 \end{aligned}$$

ed inserendo nella espressione per dW abbiamo

$$dW = -(c_p + C)\, dT_1 + T_0\, (c_p + C)\, \frac{dT_1}{T_1}$$

Integrando abbiamo infine

$$W = (c_p + C)\left[(T_1 - T_0) - T_0 \log\frac{T_1}{T_0}\right]$$