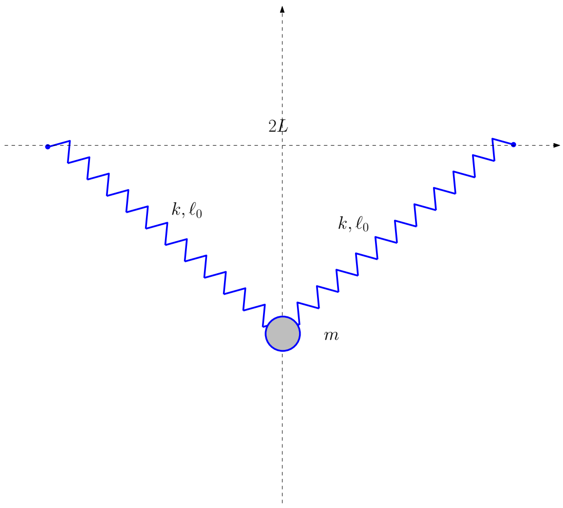
1.15. 22 giugno 2012

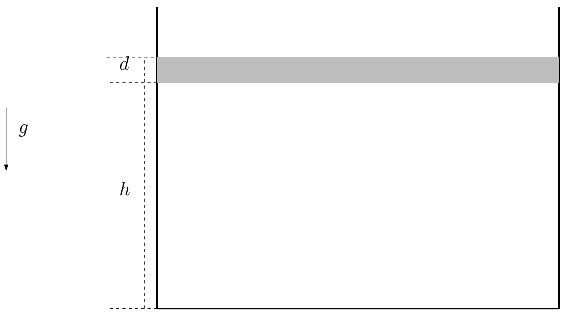
Problema 1 (15 punti)



Due molle di lunghezza a riposo ℓ_0 e costante elastica k sono disposte orizzontalmente, allineate e compresse fino ad avere una lunghezza complessiva $2L$. Il punto di contatto è vincolato a muoversi nella direzione verticale. L'estremità delle molle è libera di ruotare.

1. Trovare le posizioni di equilibrio del sistema.
2. Al punto centrale si appende una massa m. Nell'ipotesi di una grande compressione ($\ell_0 \gg L$) trovare il punto di equilibrio stabile.
3. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni del sistema attorno ad un punto di equilibrio stabile determinato.

Problema 2 (15 punti)



Si consideri 0.05 moli di un gas perfetto biatomico in un cilindro verticale di raggio $R = 0.005\text{m}$ chiuso con un pistone di spessore $d = 0.01\text{m}$ che si trova a un'altezza $h = 0.1\text{m}$ dalla base. Siamo in presenza di gravità e in assenza di pressione atmosferica.

La temperatura ambiente è di $20°C$. Assumere (poco realisticamente) che la conducibilità termica del gas sia infinita. Per le prime due domande considerare infinita anche la conducibilità termica del pistone.

1. Si calcoli la massa M del pistone.
2. Si considerino piccoli spostamenti dalla posizione di equilibrio. Si calcoli la costante elastica risultante e il periodo delle piccole oscillazioni.
3. Si supponga adesso che il pistone abbia una conducibilità termica $\kappa = 350\mathrm{Wm}^{-1}\mathrm{K}^{-1}$, e che si possa trascurare qualsiasi forma di dissipazione all'interno del gas. Sul pistone in posizione di equilibrio si posa una massa pari a 1% della massa del pistone. Passato un opportuno intervallo di tempo, di quanto è variata l'entropia del gas e quella dell'universo. Si dia una stima del tempo necessario per raggiungere l'equilibrio.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Nella posizione di equilibrio la componente verticale della forza della molla deve annullarsi. Questo è possibile se la forza stessa è nulla (cioè se la molla si trova alla sua lunghezza di riposo) oppure quando le molle sono in posizione orizzontale.

Domanda 2

Detta y la posizione del punto vincolato a muoversi verticalmente l'energia potenziale del sistema vale

$$U = 2\frac{k}{2}\left(\sqrt{L^2+y^2}-\ell_0\right)^2 + mgy$$

Nel regime $\ell_0 \gg L$ le piccole oscillazioni avverranno con $y \gg L$. Quindi

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{L^2+y^2}-\ell_0\right)^2 &= L^2+y^2+\ell_0^2-2\ell_0\sqrt{L^2+y^2} \\
&\simeq L^2+y^2+\ell_0^2-2\ell_0\left|y\right|\sqrt{1+\frac{L^2}{y^2}} \\
&\simeq L^2+y^2+\ell_0^2-2\ell_0 y
\end{aligned}$$

quindi potremo approssimare l'energia come

$$U \simeq ky^2 - 2k\ell_0\left|y\right| + mgy$$

e la posizione di equilibrio corrisponderà a

$$U' \simeq 2ky_{eq} \pm 2k\ell_0 + mg = 0$$

cioè

$$y_{eq} = \pm\ell_0 - \frac{mg}{2k}$$

Derivando ancora una volta vediamo che entrambi i punti di equilibrio trovati sono stabili

$$U'' = 2k$$

Domanda 3

Scriviamo l'energia totale. Otteniamo

$$E = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + ky^2 - 2k\ell_0\left|y\right| + mgy$$

Ponendo

$$y = y_{eq} + \epsilon$$

abbiamo

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\epsilon}^2 + ky_{eq}^2 + 2ky_{eq}\epsilon + k\epsilon^2 - 2k\ell_0\left|y_{eq} + \epsilon\right| + mgy_{eq} + mg\epsilon$$

Dato che i termini lineari in ϵ si devono cancellare attorno al punto di equilibrio abbiamo

$$E \simeq \frac{1}{2}m\dot{\epsilon}^2 + k\epsilon^2$$

e quindi

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che il pistone deve essere in equilibrio meccanico sarà

$$Mg = PS = \frac{nRT}{V}S$$

e quindi

$$M = \frac{nRT}{hg} = \frac{0.05 \times 8.314 \times 293}{9.8 \times 0.1} = 124.3\text{kg}$$

Domanda 2

Se durante le oscillazioni il gas si mantiene alla temperatura dell'ambiente abbiamo

$$PV = nRT$$

quindi le forze che agiscono sul pistone sono

$$F_y = -Mg + PS = -Mg + \frac{nRTS}{V_0 + S\delta y}$$

dove δy è il piccolo spostamento. Sviluppando al primo ordine troviamo

$$F_y = -Mg + PS = -Mg + \frac{nRTS}{V_0}\left(1 - \frac{S}{V_0}\delta y\right)$$

e dato che il termine costante si cancella all'equilibrio abbiamo

$$F_y = -\frac{nRTS^2}{V_0^2}\delta y = -\frac{nRT}{h^2}\delta y$$

Quindi la costante elastica vale

$$k = \frac{nRT}{h^2}$$

e il periodo delle piccole oscillazioni

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Mh^2}{nRT}} = 2\pi\sqrt{\frac{124.3 \times 0.01}{0.05 \times 8.314 \times 293}}\mathrm{s} \simeq 0.6\mathrm{s}$$

Domanda 3

La variazione di entropia del gas è

$$\Delta S_{gas} = nc_V \log\frac{T_f}{T_i} + nR\log\frac{V_f}{V_i}$$

ma dato che le temperature iniziali e finali sono le stesse possiamo anche scrivere

$$\Delta S_{gas} = nR\log\frac{P_i}{P_f} = nR\log\frac{M}{M+\Delta M} = nR\log\left(\frac{100}{101}\right) = -4.1 \times 10^{-3}\mathrm{JK}^{-1}$$

quindi l'entropia del gas è diminuita. La quantità di calore che il gas ha ceduto all'ambiente è determinata da

$$P_f\left(V_i - V_f\right) = nc_V\left(T_f - T_i\right) + Q_{ced}$$

e quindi

$$Q_{ced} = P_f\left(V_i - V_f\right)$$

Quindi l'aumento di entropia dell'ambiente sarà

$$\Delta S_{ambiente} = \frac{P_f\left(V_i - V_f\right)}{T}$$

e quella dell'universo

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{P_f\left(V_i - V_f\right)}{T} + nR\log\frac{P_i}{P_f} \\ &= nR\left[\left(\frac{P_f}{P_i} - 1\right) - \log\frac{P_f}{P_i}\right] = 2.1\times 10^{-5}\mathrm{JK}^{-1}\end{aligned}$$

Per stimare il tempo necessario a raggiungere l'equilibrio si può supporre che ad una iniziale brusca compressione adiabatica irreversibile faccia seguito un lento processo di conduzione che porta il sistema all'equilibrio termico. Dato che durante il processo di conduzione

$$nc_P\dot{T}_{gas} = -\frac{\kappa S}{d}\left(T_{gas} - T\right)$$

la scala temporale per il ristabilimento dell'equilibrio sarà

$$\tau \sim \left(\frac{\kappa S}{nc_P d}\right)^{-1} = \frac{7nRd}{2\kappa S} \simeq 0.5\mathrm{s}$$

Notare che questo tempo è dell'ordine del periodo delle piccole oscillazioni viste precedentemente, quindi il modello brusca compressione seguito da rilassamento è rozza.