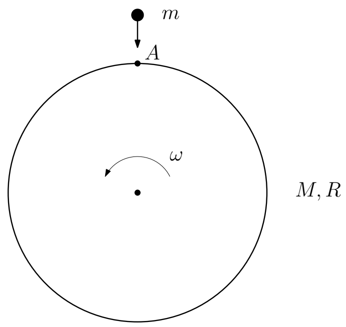
1.16. 18 gennaio 2013

Problema 1 (15 punti)



Un cilindro di massa M e raggio R può ruotare liberamente attorno al suo asse, fissato orizzontalmente. Inizialmente la sua velocità angolare è ω_0. Ad un certo istante un punto materiale inizialmente fermo di massa m rimane attaccato in un punto A posto sul bordo del cilindro, nel punto più elevato. Il sistema si trova in un campo gravitazionale costante diretto verso il basso.

1. Calcolare l'energia del sistema e il suo momento angolare rispetto ad un polo posto nel punto A prima del contatto.
2. Determinare la velocità angolare del cilindro quando la massa m arriva nel punto più in basso.
3. Determinare la reazione vincolare applicata dall'asse al cilindro dopo il contatto, quando la massa m è nella posizione più alta e quando è in quella più bassa.

Problema 2 (15 punti)

Un elastico può essere descritto a livello macroscopico dalla sua energia interna U, dalla lunghezza ℓ, dalla temperatura T e dalla tensione τ. Supporremo che sia possibile scrivere l'energia nella forma

$$U = k\bar{\ell}T$$

e che valga

$$\tau = \gamma T \left(\ell - \bar{\ell}\right)$$

dove k, $\bar{\ell}$ e γ sono costanti positive opportunamente dimensionate. Nel seguito tutte le trasformazioni considerate si intenderanno reversibili.

1. Rappresentare nel piano $\tau - \ell$ un allungamento dell'elastico a temperatura $T = T_0$ costante, da $\ell = \ell_1$ a $\ell = \ell_2$, con $\ell_2 > \ell_1 > \bar{\ell}$. Calcolare il lavoro fatto dall'elastico, dire in particolare se è positivo o negativo.
2. Nella trasformazione precedente, quanto calore è stato ceduto all'elastico?

3. Considerare adesso un allungamento che avviene adiabaticamente, sempre da ℓ_1 a ℓ_2. Calcolare il rapporto tra temperatura finale e iniziale e la variazione dell'entropia. L'elastico si scalda o si raffredda?

Soluzione primo problema

Domanda 1

L'energia prima del contatto è data da

$$E = \frac{1}{2} I_{CM} \omega_0^2$$

dove $I = MR^2/2$ è il momento di inerzia del cilindro rispetto al suo asse. Per quanto riguarda il momento angolare rispetto al polo A abbiamo

$$L = I_{CM} \omega_0$$

dato che il centro di massa è fermo.

Domanda 2

Al momento del contatto si conserva il momento angolare del sistema rispetto ad un polo posto sull'asse del cilindro. Quindi

$$I_{CM}\omega_0 = I_{CM}\omega + mR^2\omega$$

da cui troviamo la velocità angolare del sistema immediatamente dopo

$$\omega_i = \frac{I_{CM}}{I_{CM} + mR^2}\omega_0$$

Da questo momento in poi si conserva l'energia, per cui

$$\frac{1}{2}\left(I_{CM} + mR^2\right)\omega_i^2 + mgR = \frac{1}{2}\left(I_{CM} + mR^2\right)\omega_f^2 - mgR$$

e quindi

$$\omega_f = \sqrt{\omega_i^2 + \frac{4mgR}{I_{CM} + mR^2}}$$

Domanda 3

L'equazione del moto per il centro di massa del sistema nella direzione radiale da all'istante considerato

$$(M + m)\,\omega_f^2 \left(R\frac{m}{m + M}\right) = N_y - (m + M)\,g$$

che permette di determinare la componente verticale della reazione vincolare,

$$N_y = mR\omega_f^2 + (m+M)\,g$$

Dalla seconda equazione cardinale abbiamo invece

$$\left(I_{CM} + mR^2\right)\dot{\omega}_f = 0$$

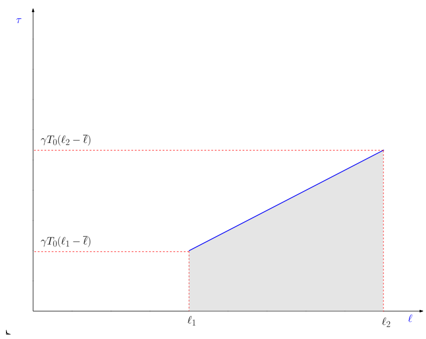
e quindi $\dot{\omega}_f = 0$. L'equazione per il centro di massa nella direzione tangenziale da adesso

$$(M+m)\,\dot{\omega}_f\left(R\frac{m}{m+M}\right) = N_x$$

da cui $N_x = 0$.

Soluzione secondo problema

Domanda 1



La trasformazione è descritta da

$$\tau = \gamma T_0\left(\ell - \overline{\ell}\right)$$

ed è quindi la retta in figura. Il lavoro fatto dall'elastico sarà

$$\begin{aligned}
L &= -\int_{\ell_1}^{\ell_2} \tau d\ell \\
&= -\gamma T_0 \int_{\ell_1-\overline{\ell}}^{\ell_2-\overline{\ell}} \ell' d\ell' \\
&= \frac{1}{2}\gamma T_0\left[\left(\ell_1-\overline{\ell}\right)^2 - \left(\ell_2-\overline{\ell}\right)^2\right] < 0
\end{aligned}$$

ed è l'area cambiata di segno sotto la retta.

Domanda 2

Dal primo principio della termodinamica

$$dQ = dU + dL = k\bar{\ell}dT - \tau d\ell$$

Dato che la temperatura è costante, $dQ = -\tau d\ell$ e quindi $Q = L$.

Domanda 3

Dal primo principio scritto precedentemente troviamo il differenziale dell'entropia, dato che la trasformazione è adiabatica e reversibile. Otteniamo

$$dS = \frac{dQ}{T} = k\bar{\ell}\frac{dT}{T} - \gamma\left(\ell - \bar{\ell}\right) d\ell = 0$$

che ci dice subito che l'entropia del sistema non varia. L'espressione può essere integrata direttamente, ottenendo

$$k\bar{\ell}\log\frac{T_2}{T_1} = \frac{\gamma}{2}\left[\left(\ell_2 - \bar{\ell}\right)^2 - \left(\ell_2 - \bar{\ell}\right)^2\right]$$

da cui

$$\frac{T_2}{T_1} = \exp\left\{\frac{\gamma}{2k\bar{\ell}}\left[\left(\ell_2 - \bar{\ell}\right)^2 - \left(\ell_2 - \bar{\ell}\right)^2\right]\right\} > 1$$

e quindi $T_2 > T_1$.