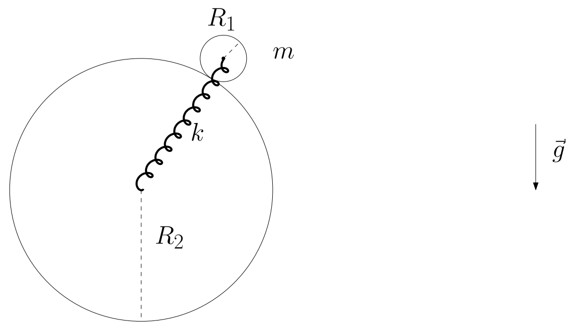
1.18. 14 giugno 2013

Problema 1 (15 punti)



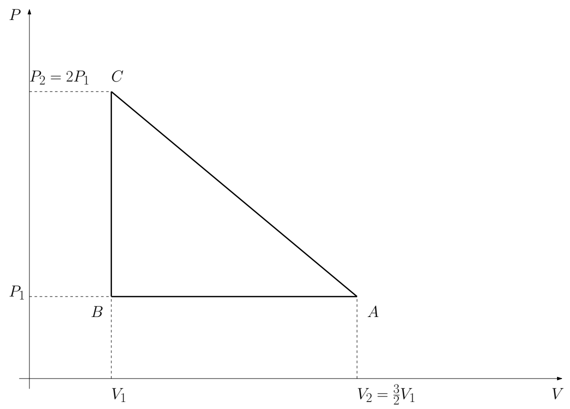
Un cilindro di raggio R_1 e massa m è in contatto con un altro cilindro, di raggio R_2, che rimane fisso. Il contatto è assicurato mediante una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k collegata ai due cilindri come in figura. Inizialmente il cilindro mobile si trova alla sommità di quello fisso, e viene spostato leggermente in modo da farlo cadere.

1. Se il cilindro piccolo è libero di strisciare su quello grande (assenza di attrito) trovare il valore minimo di k_{min} che permette di evitare il distacco in un giro completo.

2. Se il cilindro è vincolato a ruotare senza strisciare su quello grande il valore di k_{min} è maggiore o minore di quello determinato al punto precedente? Non è necessario il calcolo esplicito, ma occorre giustificare la risposta.

3. Sempre in condizioni di rotolamento puro e con $k > k_{\mathrm{min}}$, determinare la velocità del centro di massa del cilindro piccolo nel punto più basso della sua traiettoria.

Problema 2 (15 punti)



Una mole di un gas perfetto monoatomico è sottoposta alla trasformazione ciclica reversibile rappresentata in figura nel piano $P - V$. Si sa che $P_2 = 2P_1$ e $V_2 = 3V_1/2$.

CC BY NC SA

1. Calcolare il calore specifico del gas nel tratto $C - A$ ed esprimerlo in funzione del solo volume.

2. Sotto quale condizione (se esiste) il gas assorbe calore su tutta la trasformazione $C - A$?

3. Calcolare il rendimento del ciclo.

Soluzione primo problema

Prima domanda

Dalla conservazione dell'energia abbiamo nel punto più basso

$$mg\left(R_1 + R_2\right) = -mg\left(R_1 + R_2\right) + \frac{1}{2}mv^2$$

quindi il centro di massa ha una accelerazione centripeta

$$\frac{v^2}{R_1 + R_2} = 4g$$

Dall'equazione del moto nella direzione radiale troviamo

$$-4mg = N + mg - k\left(R_1 + R_2\right)$$

dove N è la reazione vincolare. Dato che deve essere $N > 0$ otteniamo

$$-5mg + k\left(R_1 + R_2\right) > 0$$

e quindi

$$k_{\mathrm{min}} = \frac{5mg}{\left(R_1 + R_2\right)}$$

Seconda domanda

Se il cilindro ruota senza strisciare la differenza di energia potenziale deve trasformarsi in parte in energia cinetica di rotazione. Quindi il centro di massa arriverà nella posizione più in basso con una velocità minore, l'accelerazione centripeta sarà ridotta e sarà sufficiente una costante elastica minore di quella valutata alla domanda precedente.

Terza domanda

Scriviamo l'energia. Abbiamo

$$E = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgy$$

Dalla condizione di rotolamento puro segue che il punto di contatto è in quiete. Quindi

$$v_{cm} = -R_1\omega$$

e quindi

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{R_1^2}\right)v_{cm}^2 + mgy \\ &= \frac{3}{4}mv_{cm}^2 + mgy \end{aligned}$$

Dalla conservazione dell'energia otteniamo

$$2mg\left(R_1 + R_2\right) = \frac{3}{4}mv_{cm}^2$$

e quindi

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{8}{3}g\left(R_1 + R_2\right)}$$

Soluzione secondo problema

Prima domanda

Dalla prima legge della termodinamica abbiamo

$$dQ = \left(c_V + P\frac{dV}{dT}\right)dT$$

e quindi

$$c = c_V + P\frac{dV}{dT}$$

La trasformazione $C \to A$ è descritta dalla legge

$$\frac{V - \frac{3}{2}V_1}{V_1 - \frac{3}{2}V_1} = \frac{P - P_1}{2P_1 - P_1}$$

ossia

$$P = 2P_1\left(2 - \frac{V}{V_1}\right)$$

ed usando l'equazione di stato abbiamo

$$T = \frac{2P_1V}{R}\left(2 - \frac{V}{V_1}\right)$$

da cui

$$\frac{dV}{dT} = \frac{R}{4P_1}\frac{V_1}{V_1 - V}$$

Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned} c &= c_V - \frac{R}{2}\left(\frac{2V_1 - V}{V - V_1}\right) \\ &= c_P - R\frac{V}{2\left(V - V_1\right)} \end{aligned}$$

Seconda domanda

Possiamo calcolare il calore scambiato su tutta la trasformazione. Dal primo principio

$$\begin{aligned} Q_{CA} &= \Delta U_{CA} + L_{CA} \\ &= c_V\left(T_A - T_C\right) + \frac{1}{2}3P_1\frac{1}{2}V_1 \\ &= \frac{3}{2}\left(RT_A - RT_C\right) + \frac{3}{4}P_1V_1 \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}P_1V_1 - 2P_1V_1\right) + \frac{3}{4}P_1V_1 = 0 \end{aligned}$$

Possiamo concludere che il gas non può assorbire calore su tutta la trasformazione.

Più in dettaglio, dato che per $V > V_1$

$$\frac{dV}{dT} = \frac{R}{4P_1}\frac{V_1}{V_1 - V} < 0$$

per tutto il tratto $C - A$ la temperatura diminuisce. Di conseguenza il calore sarà assorbito quando $c < 0$, ossia per

$$c = \frac{2c_v\left(V - V_1\right) - R\left(2V_1 - V\right)}{2\left(V - V_1\right)} < 0$$

Questo significa

$$V < V_1\frac{2R + 2c_V}{2c_v + R} = \frac{5}{4}V_1$$

Terza domanda

Il lavoro è dato da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}P_1V_1$$

Il calore assorbito invece

$$\begin{aligned} Q_a &= \Delta U_{BC} + \Delta U_{CX} + L_{CX} \\ &= \Delta U_{BX} + \frac{1}{2}\left(2P_1 + P_X\right)\left(V_X - V_1\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(RT_X - RT_B\right) + \frac{1}{2}\left(2P_1 + P_X\right)\left(V_X - V_1\right) \end{aligned}$$

dove $V_X = \frac{5}{4}V_1$ e corrispondentemente

$$\begin{aligned} P_X &= P = 2P_1\left(2 - \frac{V_X}{V_1}\right) = \frac{3}{2}P_1 \\ T_X &= \frac{1}{R}P_X V_X = \frac{1}{R}\frac{15}{8}P_1 V_1 \end{aligned}$$

Sostituendo abbiamo

$$Q_a = \frac{7}{4}P_1 V_1$$

e quindi

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_a} = \frac{1}{7}$$