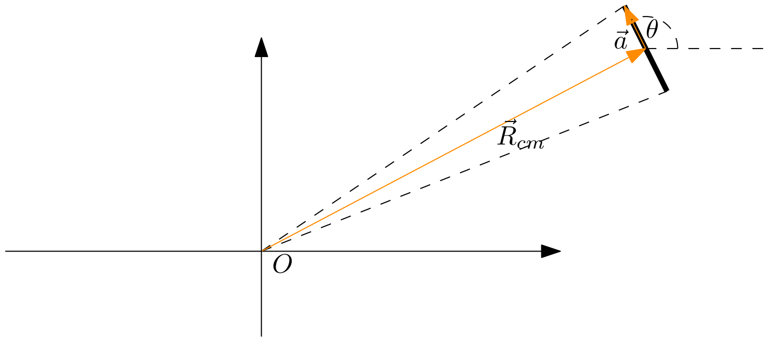
1.21. 14 gennaio 2014

Esercizio 1 (15 punti)



Una sbarra sottile di lunghezza $\ell = 2a$ e massa m si muove in un piano orizzontale. I suoi due estremi sono collegati ad un punto fisso O mediante due molle di lunghezza a riposo nulla, massa trascurabile e costante elastica k. Per descrivere il sistema si scelgano le coordinate Cartesiane x, y del centro di massa e l'angolo di inclinazione θ della sbarra rispetto ad una direzione di riferimento. La massa è distribuita uniformemente sulla sbarra.

1. Scrivere in funzione delle coordinate specificate e delle loro derivate temporali l'energia totale del sistema, il momento angolare totale rispetto ad un polo posto nel centro di massa del sistema, il momento angolare totale rispetto ad un polo posto in O.

2. Dire, motivando la risposta, se le tre quantità precedenti sono costanti del moto e descrivere il moto più generale del sistema.

3. Se è possibile scegliere le sei condizioni iniziali $x(0)$, $\dot{x}(0)$, $y(0)$, $\dot{y}(0)$, $\theta(0)$ e $\dot{\theta}(0)$ in modo che negli istanti successivi un estremo della sbarra sia fisso in O, e l'altro si muova di moto circolare uniforme. Calcolare la velocità angolare del corpo rigido e la velocità angolare del moto circolare uniforme.

Esercizio 2 (15 punti)

Un recipiente contiene n_1 moli di un gas perfetto monoatomico e n_2 moli di un gas perfetto biatomico. Tenuto conto che in una trasformazione adiabatica vale la legge

$$TV^{\gamma-1} = \text{costante}$$

dove T è la temperatura e V il volume totale

1. Calcolare il valore di γ

2. Calcolare il calore specifico molare del gas in una trasformazione nella quale

$$PV^{5/3} = \text{costante}$$

3. Se il gas è vincolato a trasformarsi secondo la legge precedente, e si trova inizialmente ad una temperatura T_i, calcolare il massimo lavoro estraibile in presenza di un bagno termico di temperatura T_b.

Soluzione primo esercizio

Prima domanda

Per l'energia abbiamo

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{k}{2}\left|\vec{R}_{cm} + \vec{a}\right|^2 + \frac{k}{2}\left|\vec{R}_{cm} - \vec{a}\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + k\left(x^2 + y^2\right) + ka^2 \end{aligned}$$

dove $I = m\ell^2/12$ ed abbiamo indicato con $\vec{R}_{cm}$ il vettore posizione corrispondente al centro di massa. Consideriamo un sistema di riferimento come in figura, con gli assi x e y nel piano nel quale avviene il moto. Per il momento angolare rispetto al centro di massa abbiamo

$$\vec{L}_{cm} = I\dot{\theta}\hat{z}$$

e per il momento angolare totale rispetto ad O

$$\begin{aligned} \vec{L} &= m\vec{R}_{cm} \wedge \vec{v}_{cm} + \vec{L}_{cm} \\ &= m\begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{pmatrix} + \vec{L}_{cm} \\ &= m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)\hat{z} + I\dot{\theta}\hat{z} \end{aligned}$$

Seconda domanda

Tutte e tre le quantità si conservano. L'energia si conserva poiché non vi sono forze esterne al sistema che compiono lavoro. Il momento angolare rispetto al centro di massa si conserva perché il momento delle forze esterne è nullo:

$$\vec{M} = \vec{a} \wedge \left[-k\left(\vec{R}_{cm} + \vec{a}\right)\right] + (-\vec{a}) \wedge \left[-k\left(\vec{R}_{cm} - \vec{a}\right)\right] = 0$$

Infine il momento angolare rispetto ad O si conserva per lo stesso motivo: entrambe le forze esterne (quelle delle due molle) hanno momento nullo rispetto a tale polo.

Dato che $\vec{L}_{cm}$ si conserva $\dot{\theta}$ è costante. Segue che la quantità

$$E' = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + k\left(x^2 + y^2\right)$$

si conserva. Ma questa è l'energia di una particella di massa m vincolata ad una molla di costante elastica $2k$. Si conserva inoltre

$$\vec{L} - \vec{L}_{cm} = m\,(x\dot{y} - y\dot{x})\,\hat{z}$$

che è il momento angolare della stessa particella. Quindi l'asta ruota con velocità angolare costante, mentre il centro di massa percorre un'orbita ellittica attorno ad O, che risulta dalla composizione di due moti armonici lungo x e lungo y di uguale pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Terza domanda

Nel caso considerato il centro di massa compie un moto circolare uniforme ad una distanza a dall'origine. Quindi possiamo porre, ad esempio,

$$\begin{aligned} x &= a\cos\omega t \\ y &= a\sin\omega t \end{aligned}$$

e quindi dovrà essere

$$\begin{aligned} x(0) &= a \\ y(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= 0 \\ \dot{y}(0) &= a\omega \end{aligned}$$

Consideriamo un estremo della sbarra. La sua legge oraria sarà data da

$$\begin{aligned} X &= a\cos\omega t - a\cos\theta \\ Y &= a\sin\omega t - a\sin\theta \end{aligned}$$

e dato che deve essere $X = Y = 0$ avremo

$$\theta = \omega t$$

cioè

$$\begin{aligned} \theta(0) &= 0 \\ \dot{\theta}(0) &= \omega \end{aligned}$$

Quindi sia la velocità angolare del corpo rigido che quella del centro di massa attorno ad O valgono ω.

Soluzione secondo esercizio

Prima domanda

Dal primo principio

$$dQ = dU_1 + dU_2 + (P_1 + P_2)\, dV = 0$$

e quindi

$$(n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}) \frac{dT}{T} + (n_1 + n_2)\, R \frac{dV}{V} = 0$$

Integrando troviamo

$$\log TV^{\frac{(n_1+n_2)R}{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}}} = \text{costante}$$

e quindi

$$\gamma = \frac{(n_1 + n_2)R}{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}} + 1 = \frac{n_1 c_{P1} + n_2 c_{P2}}{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}}$$

Seconda domanda

In questo caso abbiamo

$$\begin{aligned} dQ &= dU_1 + P_1 dV + dU_2 + P_2 dV \\ &= n_1 T \left(c_{V1} \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \right) + n_2 T \left(c_{V2} \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \right) \end{aligned}$$

Notiamo che $c_{P1}/c_{V1} = 5/3$ e quindi per la trasformazione considerata

$$TV^{\frac{c_{P1}}{c_{V1}} - 1} = \text{costante}$$

da cui

$$T^{c_{V1}} V^R = \text{costante}$$

cioè

$$c_{V1} \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = 0$$

quindi

$$dQ = n_2 \left(c_{V2} - c_{V1} \right) dT$$

Di conseguenza

$$c = \frac{1}{n_1 + n_2} n_2 \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \right) R = \frac{n_2}{n_1 + n_2} R$$

Terza domanda

Detti dQ_1 e dQ_2 i calori assorbiti dal gas e dal bagno termico rispettivamente abbiamo

$$dW = -dQ_1 - dQ_2$$

ma

$$dQ_1 = cdT$$

e quindi

$$W = (n_1 + n_2)\, c\,(T_i - T_f) - Q_2$$

D'altra parte se si opera reversibilmente

$$dS = \frac{dQ_2}{T_f} + dS_{gas} = 0$$

e quindi

$$Q_2 = -T_f \int_{T_i}^{T_f} \frac{(n_1 + n_2)\, cdT}{T} = T_f\,(n_1 + n_2)\, c \log \frac{T_i}{T_f}$$

In conclusione

$$\begin{aligned} W &= (n_1 + n_2)\, c\,(T_i - T_f) + (n_1 + n_2)\, cT_f \log \frac{T_f}{T_i} \\ &= n_2 R \left[(T_i - T_f) + T_f \log \frac{T_f}{T_i} \right] \end{aligned}$$