1.23. 3 giugno 2014

Primo esercizio

Si consideri un pendolo, costituito da un'asta rigida di lunghezza ℓ e massa trascurabile e da un corpo di massa m fissato ad una estremità dell'asta. Un opportuno perno fa sì che il pendolo abbia come unico grado di libertà quello di rotazione attorno ad esso. Il pendolo oscilla in un piano verticale in rotazione uniforme con velocità angolare Ω intorno all'asse verticale passante per il punto di sospensione.

1. Determinare per quali valori di Ω l'unica posizione di equilibrio stabile nel sistema rotante è $\theta = 0$ (θ è l'angolo di elongazione del pendolo).

2. Studiare le posizioni di equilibrio stabile e instabile per Ω diverso dai valori determinati al punto precedente.

3. Determinare i periodi delle piccole oscillazioni, in funzione di Ω, per le posizioni di equilibrio stabile.

4. Scegliendo un polo sul perno, determinare il momento di forza applicato da questo al sistema negli istanti nei quali il pendolo si trova in posizione verticale. Esprimere il risultato in funzione dell'ampiezza $\Delta\theta$ dell'oscillazione, nell'approssimazione di piccole oscillazioni attorno a $\theta = 0$.

Secondo esercizio

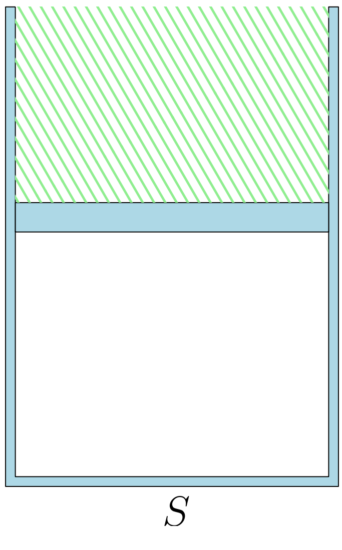

Figura 1.6.: Il recipiente cilindrico considerato nell'esercizio.

Il recipiente cilindrico in figura ha sezione S e volume totale V_T. Nello scomparto inferiore si trovano n moli di un gas perfetto monoatomico. Quello superiore è riempito fino all'orlo con un liquido di densità ρ. La massa e lo spessore del setto intermedio sono trascurabili, ed anche la pressione esterna lo è.

1. Sapendo che inizialmente il sistema si trova all'equilibrio ed il volume occupato dal gas è $V_0 = V_T/2$, calcolare la temperatura di quest'ultimo.
2. Con una trasformazione reversibile del gas si porta il suo volume a $V_1 = 9/10 V_T$. Calcolare la sua temperatura finale e rappresentare la trasformazione nel piano $P - V$.
3. Calcolare il calore totale scambiato dal gas durante la trasformazione, e la sua variazione di entropia.

Soluzione primo esercizio

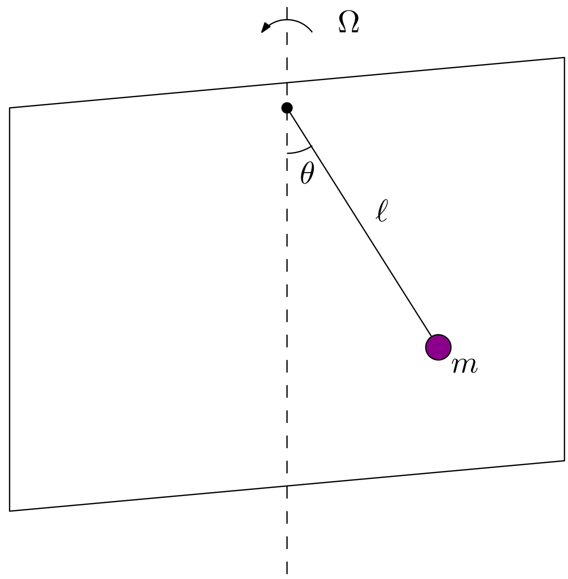

Figura 1.7.: Il pendolo sul piano in rotazione.

Prima domanda

Tenendo conto del potenziale centrifugo, l'energia potenziale vale

$$
\begin{aligned}
U &= -mg\ell\cos\theta - \frac{1}{2}m\Omega^2\ell^2\sin^2\theta \\
&= m\Omega^2\ell^2\left[\frac{1}{2}\cos^2\theta - \frac{g}{\Omega^2\ell}\cos\theta - \frac{1}{2}\right]
\end{aligned}
$$

Le posizioni di equilibrio corrispondono a

$$\frac{dU}{d\theta} = m\Omega^2\ell^2 \left(\frac{g}{\Omega^2\ell} - \cos\theta\right)\sin\theta = 0$$

cioè

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0 \\ \theta_2 &= \pi \\ \cos\theta_3 &= \frac{g}{\Omega^2\ell} \end{aligned}$$

Per discutere il segno di questa espressione consideriamo tre casi, riassunti nel diagramma in Figura 1.8.

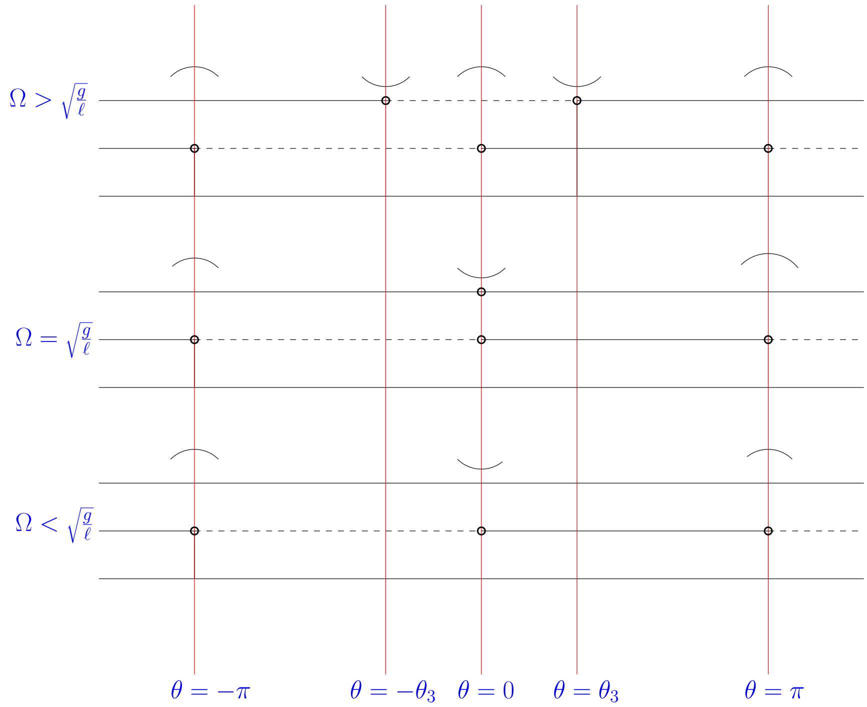

Figura 1.8.: Il segno della derivata del potenziale in funzione dell'angolo, per diversi valori di Ω. Il potenziale è periodico, con periodo 2π.

Vediamo che la posizione $\theta = 0$ è stabile solo per

$$|\Omega| < \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

In tale intervallo è anche l'unica posizione di equilibrio stabile.

Seconda domanda

Sempre facendo riferimento al diagramma in Figura 1.8 vediamo che possiamo distinguere due casi. Se $|\Omega| > \sqrt{g/\ell}$ abbiamo le posizioni di equilibrio

1. $\theta = 0$ instabile
2. $\theta = \pm \arccos \sqrt{\frac{g}{\Omega^2 \ell}}$ stabile
3. $\theta = \pi$ instabile

Se invece Se $|\Omega| \leq \sqrt{g/\ell}$ abbiamo

1. $\theta = 0$ stabile
2. $\theta = \pi$ instabile

Il tutto è riassunto in Figura 1.9.

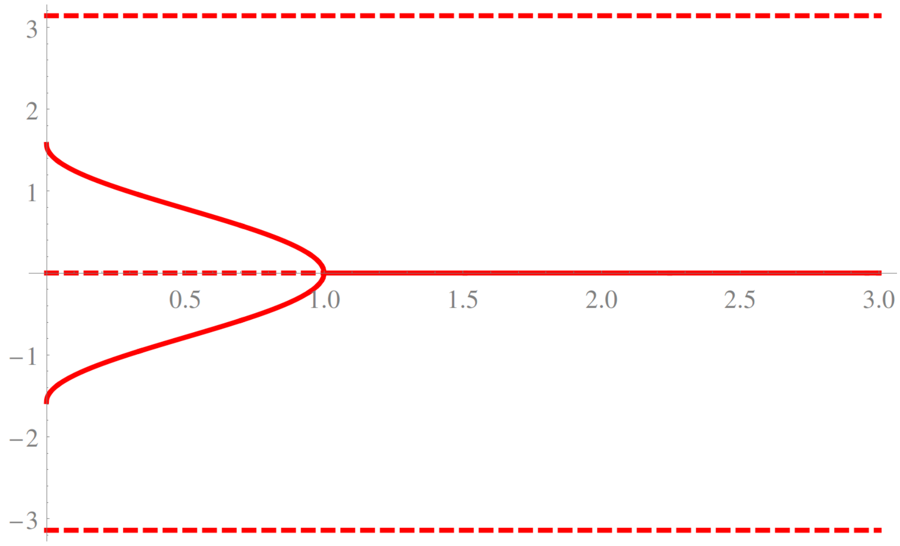

Figura 1.9.: Le posizioni di equilibrio in funzione del parametro $\lambda = \frac{g}{\Omega^2 \ell}$. Sull'asse delle ascisse è riportato λ, su quello delle ordinate il valore di θ all'equilibrio. Una posizione di equilibrio stabile è indicata con la linea continua, una instabile da una linea tratteggiata.

Terza domanda

Per $\theta = 0$ possiamo approssimare il potenziale al secondo ordine. A meno di una costante otteniamo

$$U = \frac{1}{2} m \Omega^2 \ell^2 \left(\frac{g}{\Omega^2 \ell} - 1 \right) \theta^2$$

Per quanto riguarda l'energia cinetica vale

$$K = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\theta}^2$$

e il periodo delle piccole oscillazioni sarà

$$T = \frac{2\pi}{|\Omega|} \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{g}{\Omega^2 \ell} - 1\right)}}$$

che è reale nell'intervallo nel quale $\theta = 0$ è posizione di equilibrio stabile.

Per $\cos\theta = \frac{g}{\Omega^2\ell}$ possiamo porre $\theta = \theta_3 + \epsilon$ e sviluppare il potenziale al secondo ordine in ϵ. Dato che

$$U(\theta_3 + \epsilon) = U(\theta_3) + \frac{dU}{d\theta}(\theta_3)\epsilon + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_3)\epsilon^2 + O\left(\epsilon^3\right)$$

e che la derivata prima si annulla abbiamo a meno di una costante

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_3)\epsilon^2 \\ &= \frac{1}{2} m\Omega^2\ell^2 \left(\frac{g}{\Omega^2\ell}\cos\theta_3 - 2\cos^2\theta_3 + 1\right)\epsilon^2 \\ &= \frac{1}{2} m\Omega^2\ell^2 \left[1 - \left(\frac{g}{\Omega^2\ell}\right)^2\right]\epsilon^2 \end{aligned}$$

mentre per l'energia cinetica

$$K = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\epsilon}^2$$

e quindi

$$T = \frac{2\pi}{|\Omega|} \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{g}{\Omega^2\ell}\right)^2}}$$

ancora una volta reale nell'intervallo per il quale la posizione di equilibrio considerata è stabile.

Quarta domanda

Scegliendo un sistema di coordinate con l'origine nel perno abbiamo la massa nella posizione

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \ell\sin\theta \\ -\ell\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \ell\theta \\ -\ell \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove si è scelto il piano di oscillazione coincidente con il piano $x-y$. La velocità vale

$$\vec{v} \simeq \begin{pmatrix} \ell\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e per l'accelerazione

$$\vec{a} \simeq \begin{pmatrix} \ell\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Infine per il momento angolare (rispetto al perno) abbiamo

$$\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v} = m \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \ell\theta & -\ell & 0 \\ \ell\dot{\theta} & 0 & 0 \end{vmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\ell^2\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Dalla seconda equazione cardinale otteniamo il momento $\vec{M}$ applicato dal perno:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} - \vec{r} \wedge \left(\vec{F}_p + \vec{F}_c + \vec{F}_{co}\right)$$

e sappiamo che $M_z = 0$. Abbiamo indicato con

$$\vec{F}_p = -mg\hat{y}$$

la forza peso, con

$$\vec{F}_c = -m\vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{r}\right) = m\Omega^2\ell\theta\hat{x}$$

la forza centrifuga e con

$$\vec{F}_{co} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = 2m\Omega\ell\dot{\theta}\hat{z}$$

quella di Coriolis. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \vec{M} &= m\ell^2\ddot{\theta}\hat{z} - (\ell\theta\hat{x} - \ell\hat{y}) \wedge \left(-mg\hat{y} + m\Omega^2\ell\theta\hat{x} + 2m\Omega\ell\dot{\theta}\hat{z}\right) \\ &= \left(m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\theta - m\ell^2\Omega^2\theta\right)\hat{z} + 2m\Omega\ell^2\dot{\theta}\hat{x} + O\left(\theta^2\right) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\left(1 - \frac{\Omega^2\ell}{g}\right)\theta &= 0 \\ M_x &= 2m\Omega\ell^2\dot{\theta} \\ M_y &= 0 \\ M_z &= 0 \end{aligned}$$

Sappiamo che l'oscillazione è data da

$$\theta(t) = \Delta\theta \sin \omega t$$

dove

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}\left(1 - \frac{\Omega^2 \ell}{g}\right)}$$

La velocità angolare nella posizione verticale sarà data dunque da

$$\dot{\theta} = \omega \Delta\theta$$

e quindi

$$M_x = 2m\Omega\ell^2\Delta\theta\sqrt{\frac{g}{\ell}\left(1 - \frac{\Omega^2 \ell}{g}\right)}$$

Soluzione secondo esercizio

Prima domanda

Detto V il volume occupato dal gas abbiamo

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{\rho g}{S}\left(V_T - V\right)$$

e quindi inizialmente

$$T_0 = \frac{\rho g}{nRS}\left(V_T - V_0\right) V_0 = \frac{1}{4}\frac{\rho g}{nRS} V_T^2$$

Seconda domanda

Abbiamo

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{\rho g}{S}\left(V_T - V\right)$$

e quindi la trasformazione è un segmento di estremi

$$(P_0, V_0) = \left(\frac{\rho g V_T}{2S}, \frac{V_T}{2}\right)$$

e

$$(P_1, V_1) = \left(\frac{\rho g V_T}{10S}, \frac{9}{10} V_T\right)$$

La temperatura finale sarà

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = \frac{9}{100}\frac{\rho g}{nRS} V_T^2$$

Terza domanda

Dato che

$$\begin{aligned}
dQ &= dU + PdV \\
&= nc_V dT + \frac{\rho g}{S}\left(V_T - V\right) dV \\
&= nc_V dT + \frac{\rho g}{S}\left(V_T - V\right) dV
\end{aligned}$$

integrando otteniamo

$$\begin{aligned}
Q &= nc_V\left(T_1 - T_0\right) + \frac{\rho g}{S}\left[\left(V_T V_1 - \frac{1}{2}V_1^2\right) - \left(V_T V_0 - \frac{1}{2}V_0^2\right)\right] \\
&= -\frac{3}{25}\frac{\rho g}{S}V_T^2
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'entropia

$$\begin{aligned}
\Delta S &= nc_V \log\frac{T_1}{T_0} + nR\log\frac{V_1}{V_0} \\
&= nR\left(\frac{3}{2}\log\frac{9}{25} + \log\frac{9}{5}\right) \\
&\simeq -0.94\, nR
\end{aligned}$$