1.24. 4 luglio 2014

Primo esercizio

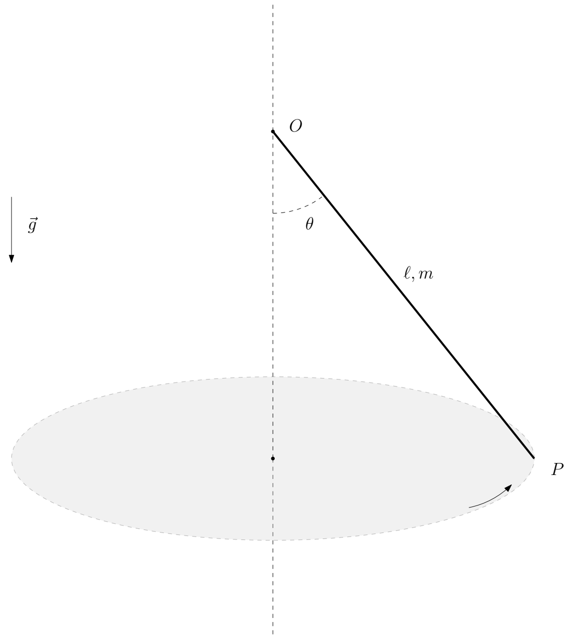

Figura 1.10.: La sbarra considerata nell'esercizio.

Una sbarra molto sottile di lunghezza ℓ e massa m è fissata ad un suo estremo ad un punto O, attorno al quale può ruotare liberamente nello spazio. Inizialmente viene posta in rotazione come in Figura 1.10, in modo tale che l'altro estremo P percorra un'orbita circolare di raggio $\ell/2$.

- Calcolare il periodo dell'orbita specificata.
- Calcolare la reazione vincolare applicata alla sbarra nel punto O, in modulo direzione e verso.
- Si vuole invertire il verso dell'orbita applicando istantaneamente al centro di massa della sbarra un impulso $\vec{J}$ perpendicolare al piano che contiene la sbarra e l'asse di rotazione. Quanto vale il momento angolare prima e dopo l'inversione del moto? Quanto vale il modulo di $\vec{J}$?

Soluzione

Prima domanda

Ponendosi in un sistema rotante con la sbarra l'energia potenziale deve essere minima. Quest'ultima si scrive

$$\begin{aligned} U &= -mg\frac{\ell}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\int \omega^2\rho^2 dm \\ &= -mg\frac{\ell}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{m}{\ell}\int_0^{\ell} \omega^2 u^2 \sin^2\theta du \\ &= -mg\frac{\ell}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\frac{m\ell^2}{3}\omega^2 \end{aligned}$$

Derivando rispetto a θ otteniamo

$$U' = m\frac{\ell}{2}\sin\theta\left(g - \frac{2}{3}\ell\omega^2\cos\theta\right) = 0$$

cioè ($\theta = \pi/6$)

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2\ell\cos\theta}} = \sqrt{\frac{g\sqrt{3}}{\ell}}$$

e quindi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g\sqrt{3}}}$$

Seconda domanda

Dato che il centro di massa si muove di moto circolare uniforme in un piano orizzontale abbiamo che

$$-m\omega^2\frac{\ell}{2}\sin\theta\hat{e}_\rho = \vec{R} - mg\hat{e}_z$$

dove $\hat{e}_\rho$ è il versore radiale nel piano orizzontale e $\hat{e}_z$ quello verticale. Quindi

$$\begin{aligned} \vec{R} &= -m\omega^2\frac{\ell}{2}\sin\theta\hat{e}_\rho + mg\hat{e}_z \\ &= mg\left(\hat{e}_z - \frac{\sqrt{3}}{4}\hat{e}_\rho\right) \end{aligned}$$

Terza domanda

Dato che la sbarra è sottile, il momento di inerzia rispetto all'asse principale parallelo ad essa è nullo, mentre quello rispetto a un asse principale qualsiasi perpendicolare passante per O vale $I = m\ell^2/3$. Di conseguenza il momento angolare prima dell'inversione

$$\vec{L}_i = \frac{m\ell^2}{3}\omega \sin\theta \hat{u}$$

dove $\hat{u}$ è un versore perpendicolare all'asta, nel piano determinato da quest'ultima e dall'asse di rotazione, orientato in modo da formare con $\vec{\omega}$ un angolo minore di $\pi/2$.

Dopo l'inversione abbiamo che ω cambia di segno, quindi

$$\vec{L}_f = -\frac{m\ell^2}{3}\omega \sin\theta \hat{u}$$

Deve essere

$$\vec{r}_{cm} \wedge \vec{J} = \vec{L}_f - \vec{L}_i = -\frac{2}{3}m\ell^2\omega \sin\theta \hat{u}$$

ed in modulo

$$\frac{\ell}{2}J = \frac{2}{3}m\ell^2\omega \sin\theta$$

da cui

$$\begin{aligned} J &= \frac{4}{3}m\ell\omega \sin\theta \\ &= \frac{2}{3}m\ell\omega \end{aligned}$$

Secondo esercizio

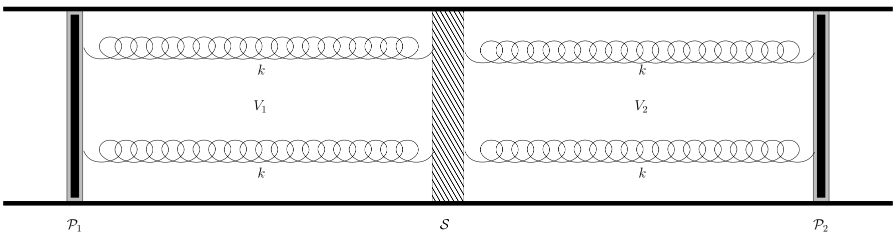

Figura 1.11.: Il recipiente considerato nell'esercizio.

Il cilindro in Figura 1.11, di sezione S, è impermeabile al calore ed è chiuso ai due estremi dai due pistoni scorrevoli $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, pure impermeabili al calore. Nel cilindro si trovano n moli di un gas perfetto biatomico. Il cilindro è inoltre separato al centro da un setto poroso $\mathcal{S}$ che può essere attraversato dal gas. Sia il pistone $\mathcal{P}_1$ che quello $\mathcal{P}_2$ sono infine collegati al setto poroso da due molle ciascuno, come in figura. Tutte e quattro le molle hanno lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica k.

- Inizialmente il pistone $\mathcal{P}_2$ è mantenuto dall'esterno aderente al setto, di conseguenza il volume V_2 dello scomparto a destra è nullo. Sapendo che il sistema è all'equilibrio alla temperatura T_0 calcolare il volume V_1 dello scomparto a sinistra.
- Si lascia quindi il pistone $\mathcal{P}_2$ libero di muoversi, e si attende il ristabilirsi dell'equilibrio. Determinare la temperatura finale del sistema e a sua variazione di entropia.
- Si tagliano adesso due delle molle, una per ciascun scomparto, e si attende nuovamente il raggiungimeno dell'equilibrio. Determinare la nuova temperatura e la nuova variazione di entropia.

Soluzione

Prima domanda

Dall'equilibrio meccanico di $\mathcal{P}_1$ abbiamo

$$P_1 S = 2k\frac{V_1}{S}$$

da cui

$$V_1 = S\sqrt{\frac{nRT_0}{2k}}$$

Seconda domanda

L'energia totale del sistema (comprendendo in esso anche le molle) si conserva. Quindi deve essere

$$nc_V T_0 + \frac{1}{2}2k\left(\frac{V_1}{S}\right)^2 = nc_V T_1 + \frac{1}{2}2k\left[\left(\frac{V_1'}{S}\right)^2 + \left(\frac{V_2'}{S}\right)^2\right]$$

ma d'altra parte dato che la pressione è la stessa per tutto il gas $V_1' = V_2'$ e quindi

$$nc_V T_0 + \frac{1}{2}2k\left(\frac{V_1}{S}\right)^2 = nc_V T_1 + \frac{1}{2}4k\left(\frac{V_1'}{S}\right)^2$$

Per l'equilibrio meccanico infine (il volume V_1' è occupato solo da $n/2$ moli)

$$V_1' = S\sqrt{\frac{nRT_1}{4k}}$$

e quindi

$$nc_V T_0 + \frac{1}{2}2k\frac{nRT_0}{2k} = nc_V T_1 + \frac{1}{2}4k\frac{nRT_1}{4k}$$

da cui

$$T_1 = T_0$$

La variazione di entropia sarà semplicemente

$$\begin{aligned}\Delta S &= nR\log\frac{2V_1'}{V_1}\\ &= \frac{1}{2}nR\log 2 \simeq 0.35\,nR\end{aligned}$$

Terza domanda

L'energia continua a conservarsi (si può immaginare che l'energia potenziale delle molle tagliate verrà liberata e ceduta al resto del sistema). Possiamo scrivere quindi ancora una volta

$$nc_V T_1 + \frac{1}{2}4k\left(\frac{V_1'}{S}\right)^2 = nc_V T_2 + \frac{1}{2}2k\left(\frac{V_1''}{S}\right)^2$$

e per l'equilibrio meccanico (il volume V_2'' è occupato solo da $n/2$ moli, ed è rimasta una sola molla per lato)

$$V_1'' = S\sqrt{\frac{nRT_2}{2k}}$$

quindi ancora una volta

$$T_2 = T_1$$

e

$$\begin{aligned}\Delta S &= nR\log\frac{V_1''}{V_1'}\\ &= \frac{1}{2}nR\log 2 \simeq 0.35R\end{aligned}$$