1.26. 14 gennaio 2015

Primo problema (15 punti)

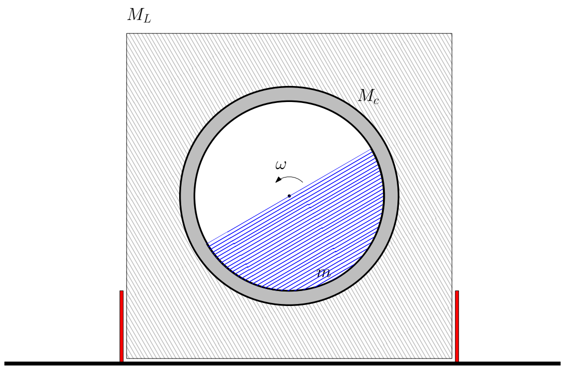

Figura 1.14.: La lavatrice.

Una lavatrice è schematizzata come in Figura 1.14 da un corpo fisso di massa M_L appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito e da un cestello rotante rappresentato da un guscio sottile di raggio R e massa M_c. Il centro di massa del corpo fisso è sull'asse di rotazione. Rappresenteremo il carico come un mezzo cilindro di massa m solidale al cestello, e nel seguito considereremo il sistema cestello+carico come un unico corpo rigido. Due pareti laterali impediscono alla lavatrice di traslare orizzontalmente o ruotare, ma non di traslare verticalmente.

1. Sapendo che il centro di massa del solo carico si trova a una distanza $a = \frac{4}{3\pi}R$ dall'asse di rotazione, calcolare la distanza d del centro di massa del sistema carico+cestello dall'asse di rotazione. Calcolare il momento di inerzia dello stesso sistema rispetto all'asse passante per il suo centro di massa.

2. Se il cestello viene mantenuto in rotazione con velocità angolare costante, determinare il massimo valore ω^* per il quale non si ha distacco da terra.

3. Si rimuovono adesso le pareti laterali, in modo da permettere anche la libera traslazione orizzontale della lavatrice, e si lascia il sistema cestello+carico libero di ruotare. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni rispetto alla posizione di equilibrio.

Secondo problema (15 punti)

Considerare un ciclo termodinamico a forma di triangolo isoscele rappresentato in Figura 1.15 nel piano $T - S$. I punti 1 e 3 corrispondono a due stati con uguale temperatura T_1. Il punto 2, all'estremo superiore, corrisponde a uno stato con temperature $T_2 > T_1$. Si conoscono i valori delle entropie S_1 e S_3 negli stati corrispondenti e $S_2 = \frac{1}{2}(S_1 + S_3)$.

Il ciclo viene percorso partendo da 1 in senso orario.

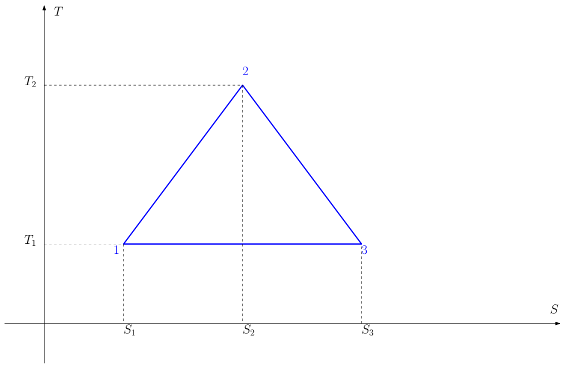

Figura 1.15.: Il ciclo triangolare, nel piano $T - S$.

1. Calcolare il lavoro fatto dal sistema.
2. Calcolare il rendimento del ciclo.
3. Se il sistema che compie il ciclo consiste in una mole di gas perfetto monoatomico determinare i rapporti V_2/V_1, V_3/V_2 e il rapporto P_3/P_1.

Soluzione primo problema

Domanda 1

La distanza del centro di massa del sistema carico+cestello dall'asse di rotazione sarà

$$d = \frac{ma}{m + M_c} = \frac{4}{3\pi} \frac{m}{m + M_c} R$$

Per quanto riguarda il momento di inerzia, scriviamolo prima rispetto all'asse di rotazione. Avremo

$$I_0 = M_c R^2 + \frac{1}{2} m R^2$$

Infatti la massa del cestello è a si trova a una distanza R dall'asse. Quella del carico è distribuita rispetto alla distanza dall'asse come quella di un cilindro intero. Detto I il momento di inerzia cercato, utilizzando il teorema di Steiner possiamo scrivere infine

$$\begin{aligned} I &= I_0 - (M_c + m)\, d^2 \\ &= M_c \left(R^2 - d^2\right) + \frac{1}{2} m \left(R^2 - 2d^2\right) \end{aligned}$$

Domanda 2

Consideriamo separatamente il carico e il resto della lavatrice (corpo esterno e cestello). Per il primo il centro di massa compie un moto circolare uniforme attorno all'asse di rotazione, che possiamo scegliere come origine. La sua posizione verticale sarà dunque

$$y_{CM,\text{carico}} = a \sin \omega t$$

e la sua accelerazione verticale

$$\ddot{y}_{CM,carico} = -a\omega^2 \sin \omega t$$

Il centro di massa del resto del sistema è invece in quiete, quindi

$$y_{CM,\text{cestello+corpo}} = y_0$$

Nel nostro caso $y_0 = 0$, ma questo non ha importanza in realtà, infatti

$$\ddot{y}_{CM,\text{cestello+corpo}} = 0$$

e questo è tutto ciò che importa. Infatti l'accelerazione verticale del centro di massa di tutto il sistema sarà

$$\ddot{y}_{CM} = \frac{-ma\omega^2 \sin \omega t}{m + M_c + M_L}$$

e dalla prima equazione cardinale otteniamo

$$(m + M_c + M_L)\, \ddot{y}_{CM} = -\,(m + M_c + M_L)\, g + N$$

Sostituendo e risolvendo rispetto a N otteniamo

$$N = (m + M_c + M_L)\, g - ma\omega^2 \sin \omega t$$

Il minimo valore di N è

$$N = (m + M_c + M_L)\, g - ma\omega^2$$

e la condizione per il distacco $N < 0$, da cui

$$\omega^* = \sqrt{\left(1 + \frac{M_c + M_L}{m}\right) \frac{g}{a}}$$

Domanda 3

L'energia del sistema si scrive

$$E = \frac{1}{2} M_L \dot{X}^2 + \frac{1}{2}(M_c + m)\left[\left(\dot{X} + d\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + d^2\dot{\theta}^2 \sin^2\theta\right] + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - mga\cos\theta$$

e la quantità di moto orizzontale

$$P_x = M_L \dot{X} + (M_c + m)\left(\dot{X} + d\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

dove X parametrizza la posizione orizzontale della lavatrice. Ponendosi nel sistema di riferimento inerziale nel quale $P_x = 0$ abbiamo

$$\dot{X} = -\frac{M_c + m}{M_L + M_c + m} d\dot{\theta}\cos\theta$$

e sostituendo nell'energia otteniamo

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} M_L \left(\frac{M_c + m}{M_L + M_c + m}\right)^2 d^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta \\
&+ \frac{1}{2}\left(M_c + m\right)\left[\left(\frac{M_L}{M_L + M_c + m}\right)^2 d^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + d^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right] \\
&+ \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta
\end{aligned}$$

Nell'approssimazione di piccole oscillazioni possiamo approssimare $\sin\theta \simeq \theta$ e $\cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2$. Sostituendo e trascurando quantità di ordine superiore al secondo e costanti irrilevanti abbiamo

$$E = \frac{1}{2}\left[\frac{M_L\left(M_c + m\right)}{M_L + M_c + m} d^2 + I\right]\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mga\theta^2$$

che descrive un oscillatore armonico di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mga}{I + \frac{M_L(M_c+m)}{(M_L+M_c+m)} d^2}}$$

Nel limite $M_L \to \infty$ (lavatrice fissata a terra) questo diventa

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mga}{I + \left(M_c + m\right) d^2}}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che

$$dQ = TdS$$

il calore è assorbito quando l'entropia aumenta, e ceduto in caso contrario. Avremo quindi che il calore totale assorbito sarà uguale all'area al di sotto del due lati uguali del triangolo,

$$Q_{ass} = \frac{1}{2}\left(S_3 - S_1\right)\left(T_2 - T_1\right) + \left(S_3 - S_1\right) T_1$$

e quello ceduto sarà uguale all'area al di sotto della base del triangolo

$$Q_{ced} = \left(S_3 - S_1\right) T_1$$

Dato che il lavoro è la differenza tra calore assorbito e calore ceduto, avremo

$$L = \frac{1}{2}\left(S_3 - S_1\right)\left(T_2 - T_1\right)$$

che è l'area del triangolo.

Domanda 2

L'efficienza si calcola a partire dei risultati precedenti:

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{L}{Q_{ass}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left(S_3 - S_1\right)\left(T_2 - T_1\right)}{\frac{1}{2}\left(S_3 - S_1\right)\left(T_2 - T_1\right) + \left(S_3 - S_1\right)T_1} \\ &= \frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1}\end{aligned}$$

Domanda 3

Ponendo

$$\Delta S = S_3 - S_2 = S_2 - S_1 = \frac{1}{2}\left(S_3 - S_1\right)$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\Delta S &= c_V \log\frac{T_2}{T_1} + R\log\frac{V_2}{V_1} \\ \Delta S &= -c_V \log\frac{T_2}{T_1} + R\log\frac{V_3}{V_2} \\ 2\Delta S &= R\log\frac{V_3}{V_1}\end{aligned}$$

Dalle prime due relazioni troviamo

$$\begin{aligned}\frac{V_2}{V_1} &= \frac{e^{\Delta S/R}}{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{c_V/R}} \\ \frac{V_3}{V_2} &= \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{c_V/R} e^{\Delta S/R}\end{aligned}$$

Dalla terza abbiamo

$$\frac{V_3}{V_1} = e^{2\Delta S/R}$$

ma dato che $P_3V_3 = nRT_1$ e $P_1V_1 = nRT_1$ abbiamo

$$\frac{P_3}{P_1} = e^{-2\Delta S/R}$$