## 1.27. 4 febbraio 2015

### Primo problema

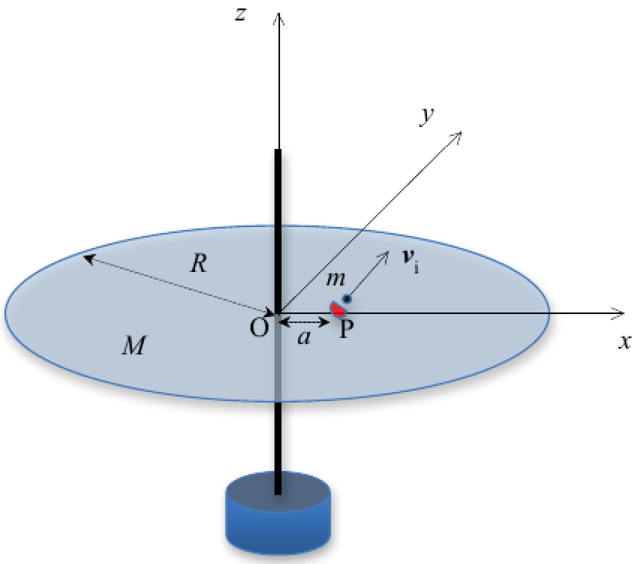


Figura 1.16.: Il giocattolo meccanico

Un giocattolo meccanico consiste di un disco omogeneo di massa $M$ e raggio $R$, imperniato sul suo asse intorno al quale può ruotare senza attrito. In un sistema di coordinate cartesiane di un riferimento inerziale $S$, con asse $z$ verticale, il centro del disco coincide con l'origine $O$, il disco giace sul piano orizzontale $xy$ mentre l'asse di rotazione è fisso e coincide con l'asse $z$. Un piccolo dispositivo a scatto con molla regolabile, posto sul disco e ad esso vincolato in un punto $P$ a distanza $a = R/5$ da $O$, permette di lanciare un proiettile di massa $m$ in direzione fissata.

Se il proiettile colpisce un punto della superficie del disco, vi rimane immediatamente attaccato. Inizialmente il disco è fermo. Scegliendo come asse $x$ quello su cui giace inizialmente il dispositivo a molla, la velocità iniziale - impressa al proiettile dallo scatto - nel riferimento $S$ vale $\boldsymbol{v}_i = v_0\hat{\boldsymbol{e}}_x + v_0\hat{\boldsymbol{e}}_y + v_0\hat{\boldsymbol{e}}_z$ dove $v_0$ è, appunto, regolabile. Si trascuri la massa del dispositivo a molla rispetto a quella del disco. Il gioco consiste nel regolare $v_0$ in modo che il proiettile colpisca esattamente il bordo del disco.

Nel riferimento $S$ determinare:

1. la velocità angolare del disco, in funzione di $v_0$, subito dopo lo scatto.

Nello stesso riferimento S, quando il proiettile colpisce esattamente il bordo del disco, determinare:

2. il punto del disco su cui impatta il proiettile (lo si individui in riferimento al raggio OP);

3. la velocità angolare del disco dopo l'impatto;
4. l'impulso (delle forze) trasmesso dall'asse al disco nell'istante dell'impatto;
5. l'impulso del momento delle forze trasmesso dall'asse al disco nell'istante dell'impatto.

## Secondo problema

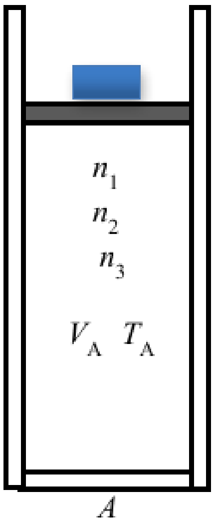


Figura 1.17.: Sistema termodinamico considerato nell'esercizio.

Un recipiente cilindrico verticale, con sezione di area $A$, è dotato di un pistone di massa ignota. Le pareti del cilindro e il pistone sono isolanti termici ideali (perfetti). Il recipiente contiene una miscela di gas ideali di tre tipi diversi, costituita rispettivamente di $n_1$, $n_2$ e $n_3$ moli di ciascun gas. Le capacità termiche molari a volume costante, dei tre gas, valgono rispettivamente $C_1$, $C_2$ e $C_3$. Si chiamino $P$, $V$ e $T$ le ovvie variabili termodinamiche che si riferiscono al sistema nel suo complesso. Inizialmente il sistema è in equilibrio con $V = V_A$ e $T = T_A$, noti. Nel seguito si trascuri il lavoro fatto dall'atmosfera.

1. Dimostrare che una trasformazione reversibile effettuata agendo sul pistone segue la legge $PV^\gamma = \text{cost}$ e determinare $\gamma$;

A un certo istante si appoggia un corpo sul pistone, lo si lascia andare da fermo e si attende il raggiungimento del nuovo equilibrio. Si misura di nuovo il volume occupato all'equilibrio, che risulta essere $V_B = V_A/3$.

2. Determinare la massa complessiva del pistone e del corpo che vi è stato appoggiato.
3. Determinare la variazione di entropia dell'universo.

Facoltativo: si discuta se il lavoro fatto dall'atmosfera sia davvero trascurabile.

## Soluzione problema 1

### Domanda 1

### Definizioni:

- vettore posizione del proiettile in partenza: $\boldsymbol{r} = a\hat{\boldsymbol{e}}_x$
- quantità di moto del proiettile in partenza: $\boldsymbol{p}_0 = mv_0\hat{\boldsymbol{e}}_x + mv_0\hat{\boldsymbol{e}}_y + mv_0\hat{\boldsymbol{e}}_z$
- momento angolare del proiettile in partenza: $\boldsymbol{l}_0 = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_0$
- momento angolare del disco: $\boldsymbol{l}_0 = \frac{1}{2}MR^2\omega\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$
- bordo del disco: $\gamma$
- piano della traiettoria del proiettile: $\pi$
- punto di $\gamma$ che inizialmente interseca $\pi$: $Q$
- punto di $\pi$ che inizialmente coincide con $Q$: $Q'$
- piede della perpendicolare da $Q$ sulla retta $OP$: $H$
- punto del bordo del disco colpito dal proiettile: $B$
- misura angolo $\widehat{QOP}$: $\varphi_0$
- misura angolo $\widehat{QOP}$ (percorso in senso orario durante la rotazione del disco fino all'impatto): $\Delta\varphi$
- lunghezza del segmento $PH$: $x$
- lunghezza del segmento $PQ$: $b$
- 

L'angolo $\widehat{QPH}$ misura $\pi/4$rad perché le componenti $v_x$ e $v_y$ di $\boldsymbol{v}_i$ sono uguali. La traiettoria del proiettile giace su un piano perchè si tratta del moto di un grave (in presenza della sola forza peso).

$$\begin{aligned}\boldsymbol{l}_0 &= a\hat{\boldsymbol{e}}_x \times (mv_0\hat{\boldsymbol{e}}_x + mv_0\hat{\boldsymbol{e}}_y + mv_0\hat{\boldsymbol{e}}_z)\\ &= -amv_0\hat{\boldsymbol{e}}_y + amv_0\hat{\boldsymbol{e}}_z\end{aligned}$$

Si consideri come *sistema* l'insieme disco + proiettile. Le forze e i momenti esterni al sistema sono quelli applicati dall'asse e la forza peso.

La componente $z$ del momento delle forze risultante sul sistema è nulla.

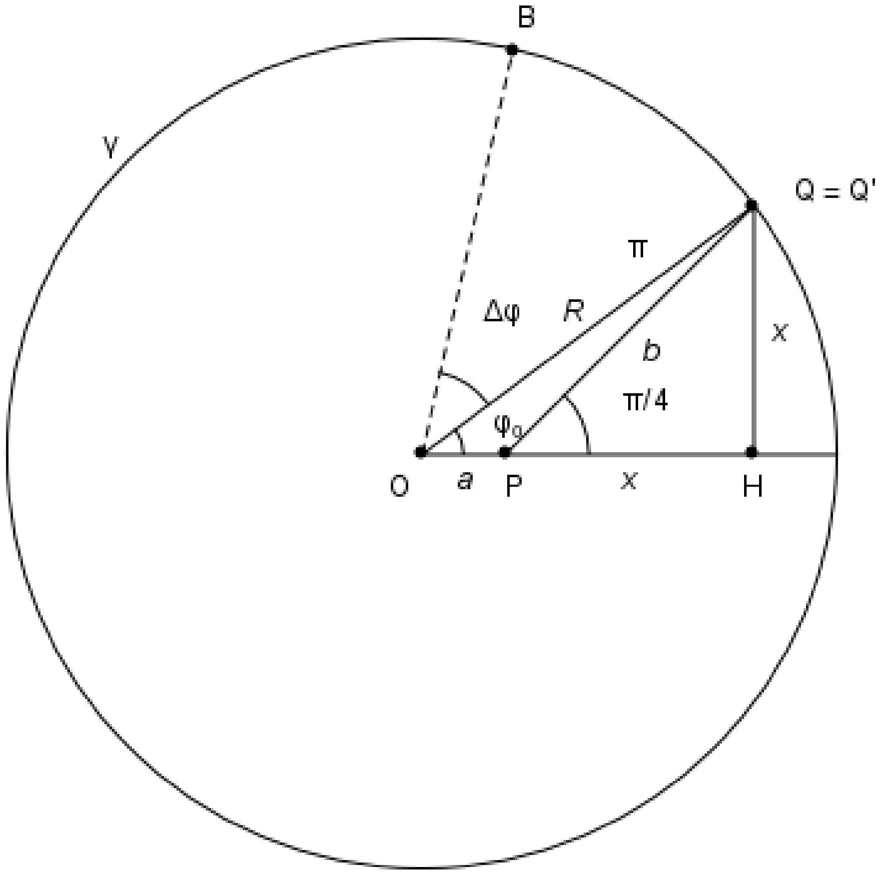


Figura 1.18.: Costruzione geometrice per il primo esercizio.

La conservazione della componente $z$ del momento angolare del sistema, inizialmente nullo, implica:

$$\frac{1}{2}MR^2\omega + amv_0 = 0$$

da cui

$$\omega = -2\frac{m}{M}\frac{a}{R}\frac{v_0}{R} = -\frac{2}{5}\frac{m}{M}\frac{v_0}{R}$$

### Domanda 2

La proiezione di $\boldsymbol{v}_i$ sul piano del disco rimane costante (moto di un grave) e il suo modulo vale $\sqrt{2}v_0$. Il tempo $\Delta$t impiegato dal proiettile per arrivare sulla verticale di $Q'$, momento in cui $B = Q'$ nel caso di impatto sul bordo, vale

$$\Delta \mathrm{t} = \frac{b}{\sqrt{2}v_0}$$

Contemportaneamente il disco compie una rotazione

$$-\Delta\varphi = \omega\Delta\mathrm{t} = -\sqrt{2}\frac{m}{M}\frac{ab}{R^2} = -\frac{\sqrt{2}}{5}\frac{m}{M}\frac{b}{R}$$

Nota: questo valore non dipende da $v_0$; questo significa che è sempre lo stesso punto $B$ di $\gamma$ a trovarsi in $Q'$, anche nel caso in cui il proiettile sorvoli il punto $Q'$ senza impattare su $\gamma$.

Per la determinazione di $b$ basta risolvere l'equazione $(a + x)^2 + x^2 = R^2$, derivante da semplici considerazioni geometriche (vedi figura), e selezionare la soluzione positiva. Si ha:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2R^2 - a^2} - a}{2} = \frac{3}{5}R \\ b &= \sqrt{2}x = \frac{3\sqrt{2}}{5}R \end{aligned}$$

Pertanto l'angolo tra la retta $OP$ e la retta $OB$ (l'azimut del punto di impatto del disco) vale:

$$\varphi_0 + \Delta\varphi = \arcsin\left(\frac{x}{R}\right) + \sqrt{2}\frac{m}{M}\frac{ab}{R^2} = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{6}{25}\frac{m}{M}$$

## Domanda 3

Continua a conservarsi la componente $z$ del momento angolare del sistema, che è nulla. Tale componente è proporzionale alla velocità angolare $\omega'$ richiesta dal testo e il coefficiente di proporzionalità è il momento di inerzia del corpo rigido costituito dal disco più il proiettile attaccato sul bordo. Pertanto deve essere:

$$\omega' = 0$$

## Domanda 4

La quantità di moto $\boldsymbol{p}_1$ del sistema, immediatamente prima dell'impatto, coincide con quella del proiettile perché il centro di massa del disco è fermo. Da $\boldsymbol{p}_0$ e dalla legge del moto di un grave, si ha:

$$\boldsymbol{p}_1 = mv_0\hat{\boldsymbol{e}}_x + mv_0\hat{\boldsymbol{e}}_y - mv_0\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

Dopo l'impatto il centro di massa del sistema è fermo, pertanto l'impulso delle forze trasmesso al sistema durante l'urto è pari a $-\boldsymbol{p}_1$. Poiché la forza peso non è impulsiva, tale impulso è trasmesso tutto dall'asse.

Nota: dal confronto con $\boldsymbol{p}_0$ si vede che le componenti $x$ e $y$ trasmesse dall'asse all'istante dello scatto sono "riassorbite" a quello dell'impatto. Viceversa, la componente $z$ dell'impulso trasmesso dall'asse è la stessa all'istante iniziale e a quello finale. Questo comportamento è dovuto all'impulso trasferito dalla forza peso durante l'intervallo di tempo $\Delta$t.

### Domanda 5

Il momento angolare $\boldsymbol{L}_1$ del sistema (rispetto al solito polo $O$) immediatamente prima dell'impatto è:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_1 &= \overline{\boldsymbol{OQ'}} \times \boldsymbol{p}_1 + \frac{1}{2} M R^2 \omega \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \\ &= \left[(a+x)\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + x \hat{\boldsymbol{e}}_y\right] \times \left[m v_0 \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + m v_0 \hat{\boldsymbol{e}}_y - m v_0 \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}\right] + \frac{1}{2} M R^2 \omega \hat{\boldsymbol{e}}_z\end{aligned}$$

da cui, con i risultati trovati precedentemente per $x$ e $\omega$, segue:

$$\boldsymbol{L}_1 = -\frac{3}{5} m R v_0 \hat{\boldsymbol{e}}_x + \frac{4}{5} m R v_0 \hat{\boldsymbol{e}}_y$$

Poiché il momento angolare del sistema dopo l'impatto è nullo (tutto è fermo), ne risulta che l'impulso del momento delle forze trasmesso dall'asse al disco è $-\boldsymbol{L}_1$; per le stesse considerazioni della risposta precedente, l'impulso del momento della forza peso è nullo durante l'urto.

Nota: $-\boldsymbol{L}_1$ giace sul piano del disco ed è diretto perpendicolarmente alla retta $OQ'$, come era facilmente prevedibile.

## Soluzione problema 2

### Domanda 1

Con ovvie definizioni dei simboli:

$$\begin{aligned}P &= P_1 + P_2 + P_3 \\ PV &= P_1 V + P_2 V + P_3 V = n_1 R T + n_2 R T + n_3 R T = (n_1 + n_2 + n_3)\, R T \\ U &= n_1 C_1 T + n_2 C_2 T + n_3 C_3 T = (n_1 C_1 + n_2 C_2 + n_3 C_3)\, T\end{aligned}$$

definendo $n = n_1 + n_2 + n_3$ e $C = (n_1 C_1 + n_2 C_2 + n_3 C_3)/\, n$ il gas soddisfa all'equazione di stato:

$$PV = nRT$$

e la sua energia interna è data da:

$$U = nCT$$

Determinate l'equazione di stato e l'energia interna, si può procedere a sviluppare la termodinamica della miscela in modo standard. Poiché equazione di stato e l'energia interna assumono la stessa forma di quelle di un gas ideale, si otterrà la stessa equazione anche per la trasformazione adiabatica reversibile:

$$PV^\gamma = cost$$

con $\gamma = \frac{C+R}{C}$

{Per completezza riportiamo un possibile procedimento}

$$dU = nCdT$$

per una trasformazione adiabatica:

$$\delta \mathrm{Q} = \mathrm{dU} + \delta \mathrm{L} = 0$$

per una trasformazione reversibile:

$$\delta \mathrm{L} = P\mathrm{dV}$$

La trasformazione adiabatica reversibile è dunque caratterizzata dall'equazione differenziale:

$$nC\mathrm{dT} + P\mathrm{dV} = 0 \tag{1.27.1}$$

Differenziando l'equazione di stato:

$$P\mathrm{dV} + V\mathrm{dP} = nR\mathrm{dT}$$

$$\mathrm{dT} = \frac{1}{nR}P\mathrm{dV} + \frac{1}{nR}V\mathrm{dP}$$

che, sostituita nella (1.27.1), produce:

$$\frac{C}{R}P\mathrm{dV} + \frac{C}{R}V\mathrm{dP} + P\mathrm{dV} = 0$$

$$\frac{C+R}{R}P\mathrm{dV} = -\frac{C}{R}V\mathrm{dP}$$

e quindi

$$\frac{C+R}{C}\frac{\mathrm{dV}}{V} = -\frac{\mathrm{dP}}{P}$$

definita $\gamma = \frac{C+R}{C}$ l'equazione precedente si integra in:

$$\gamma \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = -\ln\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

e finalmente:

$$PV^{\gamma} = P_0 V_0^{\gamma} = cost$$

## Domanda 2

Non appena il corpo sul pistone viene rilasciato, lo stato è fuori equilibrio e la trasformazione che ne consegue è quindi irreversibile. Se si trascura il lavoro fatto dall'atmosfera, tutto il lavoro sul sistema è fatto dalla forza peso. Al nuovo equilibrio il pistone si è abbassato di una quantità

$$h = \frac{V_A - V_B}{A} = \frac{2}{3}\frac{V_A}{A}$$

Dette rispettivamente $m_p$ e $m_c$ le masse del pistone e del corpo aggiunto, il lavoro fatto dalla miscela *contro* la forza peso è $L = -(m_p + m_c)\, gh$. Per una trasformazione adiabatica:

$$Q = \Delta \mathrm{U} + L = 0$$

nel nostro caso:

$$\Delta \mathrm{U} = -L = \frac{2}{3}\frac{(m_p + m_c)\, g}{A} V_A = nC\,(T_B - T_A) \tag{1.27.2}$$

dove $T_B$ è la temperatura al nuovo equilibrio. Detta $P_{\mathrm{atm}}$ la pressione atmosferica e tenuto conto delle due equazioni relative all'equilibrio meccanico, le equazioni di stato ai due equilibri termodinamici diventano:

$$\left(P_{\mathrm{atm}} + \frac{m_p g}{A}\right) V_A = nRT_A \tag{1.27.3}$$

$$\left(P_{\mathrm{atm}} + \frac{m_p g}{A} + \frac{m_c g}{A}\right) V_B = nRT_B \tag{1.27.4}$$

Le equazioni (1.27.2), (1.27.3) e (1.27.4) costituiscono un sistema di 3 equazioni per le 4 incognite $m_p$, $m_c$, $T_B$ e $P_{\mathrm{atm}}$; il sistema può essere risolto in funzione del parametro $P_{\mathrm{atm}}$, fornendo:

$$m_p = \frac{A}{gV_A}\left(nRT_A - P_{\mathrm{atm}} V_A\right)$$
$$m_c = \frac{A}{gV_A}\frac{2R}{C - 2R}\left(nCT_A + nRT_A - P_{\mathrm{atm}} V_A\right)$$

Oppure, più semplicemente, dalle equazioni (1.27.2) e (1.27.4) e considerando come incognita la massa complessiva $m = m_p + m_c$:

$$m = \frac{A}{gV_A}\frac{C}{C - 2R}\left(3nRT_A - P_{\mathrm{atm}} V_A\right)$$
$$T_B = \frac{3nCT_A - 2P_{\mathrm{atm}} V_A}{3n(C - 2R)}$$

che, in assenza di atmosfera, si riducono a:

$$m = 3nRT_A \frac{A}{gV_A}\frac{C}{C - 2R}$$
$$T_B = \frac{C}{(C - 2R)} T_A$$

### Domanda 3

L'osservazione fatta in risposta al primo quesito vale anche per la formula della variazione di entropia della miscela tra i due stati:

$$\Delta \mathrm{S} = nC \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Trascurando la variazione di entropia dell'atmosfera (l'atmosfera è termicamente isolata e, trascurando il lavoro fatto da essa, la sua temperatura non cambia; così la variazione di entropia dell'atmosfera dipende dal logaritmo del rapporto tra il volume iniziale e quello finale, che è assai prossimo a 1), $\Delta S$ rappresenta anche la variazione di entropia dell'universo.

### Facoltativo

Per superare l'effetto della pressione atmosferica le masse in gioco dovrebbero essere superiori alla superficie $A$ moltiplicata per una densità di $1\mathrm{kg/cm^2}$: per dimensioni ragionevoli del pistone e del corpo questo è poco verosimile. Pertanto, in un caso reale, la pressione atmosferica non sarà piccola in confronto a quella dovuta alle masse $m_p$ e $m_c$. Questo comporterà un moto sufficientemente lento del pistone affinché le molecole d'aria vi restino in prossimità e continuino a urtarlo: il lavoro compiuto dall'atmosfera non sarà quindi trascurabile rispetto a quello della forza peso sulle masse in gioco.