1.29. 3 luglio 2015

Primo problema

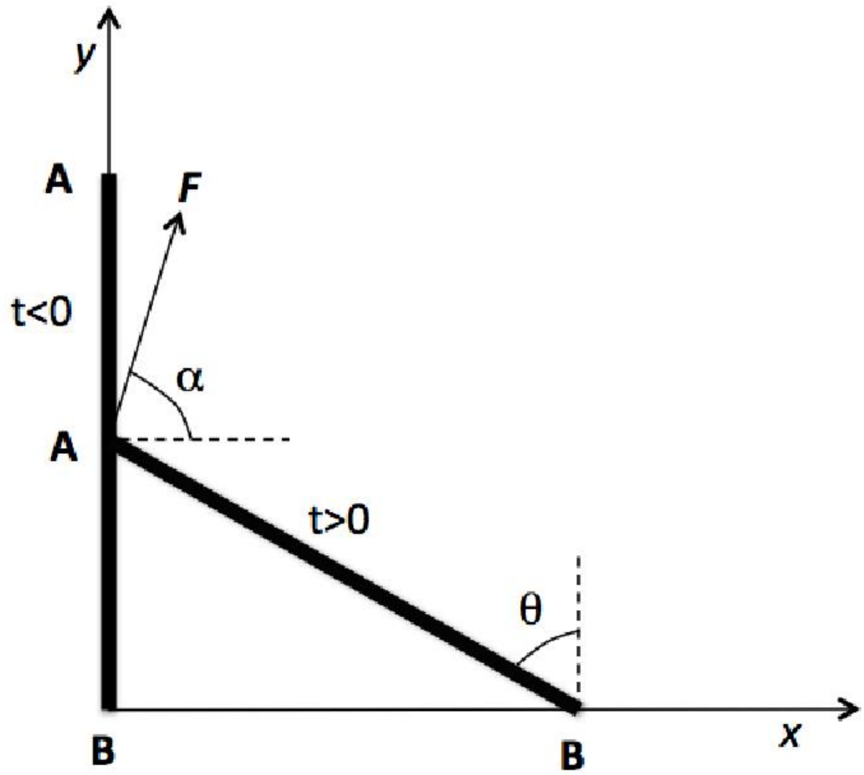

Figura 1.20.: La trave del problema, nella posizione iniziale e in una posizione generica per $t > 0$.

Una trave omogenea, di lunghezza l e massa m, è tenuta appoggiata al suolo in posizione verticale da una gru agganciata all'estremo superiore A.

Si fissi una terna cartesiana sinistrorsa avente gli assi x e y, rispettivamente orizzontale e verticale, come in Figura 1.20 e l'asse z di conseguenza.

All'istante $t = 0$ la trave viene messa in rotazione con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \hat{\boldsymbol{e}}_z$costante, da una opportuna forza impulsiva orizzontale agente sull'estremo B a contatto con il suolo. Il manovratore della gru deve regolare, istante per istante, la forza F sull'estremo A, in modo da mantere tale estremo lungo la verticale iniziale, l'estremo B a contatto con il suolo e la velocità angolare di rotazione della trave costante lungo l'intero tragitto, fino al contatto di tutta la trave con il suolo. L'estremo B scivola senza attrito lungo l'asse orizzontale.

Determinare:

1. il moto del baricentro G della trave: traiettoria, velocità e accelerazione;

2. l'andamento dell'energia cinetica della trave durante il moto;
3. i lavori fatti, nel portare la trave dalla posizione verticale a quella orizzontale, rispettivamente dalla forza di reazione del suolo $\boldsymbol{N}$, dalla forza peso $\boldsymbol{P}$ e dalla forza $\boldsymbol{F}$ applicata dalla gru all'estremo A;
4. la reazione $\boldsymbol{N}(t)$ del suolo sull'estremo B della trave;
5. il valore limite della velocità di rotazione ω_0 oltre il quale il manovratore non può mantenere l'estremo B della trave sempre a contatto con il suolo secondo le specifiche;
6. le componenti $F_x(t)$ e $F_y(t)$ della forza $\boldsymbol{F} = F_x\hat{\boldsymbol{e}}_x + F_y\hat{\boldsymbol{e}}_y$, verificando esplicitamente il risultato trovato al punto 3. sul lavoro compiuto da $\boldsymbol{F}$ durante il moto. Si verifichi, inoltre, se esistono dei valori di ω_0 e di t per i quali l'angolo formato da $\boldsymbol{F}$ con l'asse orizzontale sia minore di $\pi/2$, come arbitrariamente illustrato nel disegno.

Secondo problema

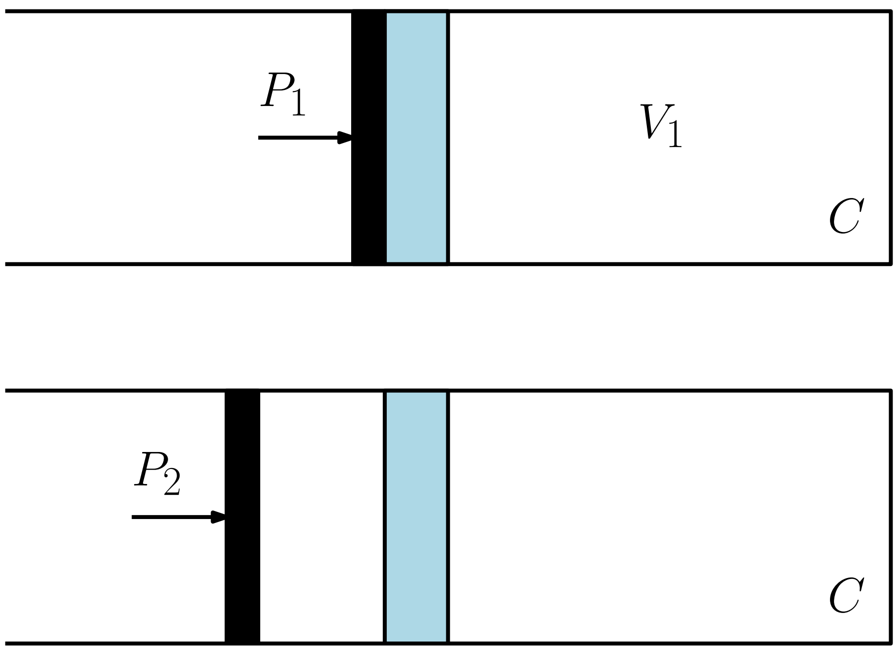

Figura 1.21.: Il cilindro, il pistone mobile e il setto poroso nello stato iniziale e in quello finale.

Un cilindro dotato di un pistone mobile e di un setto poroso fisso contiene n moli di gas ideale monoatomico. La sezione trasversa del cilindro ha area A. La camera C, costituita dalla porzione di cilindro compresa tra il setto poroso e il fondo, ha volume V_1.

Il setto poroso è sede di una diffusione del gas sufficientemente lenta da permettere alle due porzioni separate di gas di raggiungere una situazione di quasi equilibrio, a parte la lenta diffusione, con grandezze termodinamiche ben definite in ciascuna porzione. Inizialmente tutto il gas si trova nella camera C alla pressione P_1, il pistone è mantenuto appoggiato al setto poroso e tutto il sistema è all'equilibrio termodinamico.

L'intero cilindro viene isolato termicamente dall'ambiente esterno. Successivamente si riduce la forza esterna applicata al pistone in modo che la pressione da esso determinata, in condizioni di equilibrio, assuma il valore $P_2 < P_1$.

1. Determinare la temperatura del gas quando questo raggiunge il nuovo equilibrio termodinamico.
2. Determinare quante moli di gas restano nella camera C, quando viene raggiunto il nuovo equilibrio termodinamico.
3. Stabilire se la trasformazione subita sia reversibile o irreversibile.
4. Si supponga di eseguire lo stesso esperimento, ma senza isolare termicamente il cilindro rispetto all'ambiente circostante: determinare la variazione di entropia dell'universo in questo diverso caso.
5. Nel caso dell'equilibrio raggiunto con l'isolamento termico (domande 1, 2 e 3), successivamente si riporta istantaneamente la forza esterna applicata al pistone a un valore tale che, all'equilibrio, questo torni a esercitare sul gas una pressione P_1. Ci si chiede se lo stato finale del gas torni ad essere quello iniziale nella camera C, pertanto si determini la temperatura del gas al nuovo stato finale.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Il centro di massa G si trova a metà della trave e le sue coordinate sono

$$x_G = \frac{1}{2} l \sin\theta$$
$$y_G = \frac{1}{2} l \cos\theta$$

Per ipotesi la velocità angolare è mantenuta costante: $\dot{\theta} = \omega_0$. Da questo segue

$$\theta(t) = \omega_0 t$$

dove abbiamo imposto la condizione iniziale $\theta(0) = 0$. Possiamo quindi scrivere le coordinate del centro di massa in funzione del tempo

$$x_G = \frac{1}{2} l \sin\omega_0 t$$
$$y_G = \frac{1}{2} l \cos\omega_0 t$$

La traiettoria è un arco di circonferenza di raggio $l/2$. Derivando si ricavano velocità e accelerazione:

$$\dot{x}_G = \frac{1}{2} l\omega_0 \cos\omega_0 t \tag{1.29.1}$$

$$\dot{y}_G = -\frac{1}{2} l\omega_0 \sin\omega_0 t \tag{1.29.2}$$

$$\ddot{x}_G = -\frac{1}{2} l\omega_0^2 \sin\omega_0 t \tag{1.29.3}$$

$$\ddot{y}_G = -\frac{1}{2} l\omega_0^2 \cos\omega_0 t \tag{1.29.4}$$

Domanda 2

L'energia cinetica della trave, ad un generico istante, vale:

$$E_K = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega_0^2$$

Sostituendo la velocità trovata nelle Equazioni (1.29.1) e (1.29.2) e ricordando che per una trave $I_G = ml^2/12$, si ha:

$$E_K = \frac{1}{2}\left(m\frac{l^2\omega_0^2}{4} + \frac{ml^2}{12}\omega_0^2 \right) = \frac{1}{6} ml^2\omega_0^2$$

Pertanto l'energia cinetica è una costante del moto.

Domanda 3

Scriviamo il lavoro compiuto dalle forze esterne $\boldsymbol{N}$, $m\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{F}$. La reazione vincolare $\boldsymbol{N}$ è perpendicolare allo spostamento del suo punto di applicazione B, per cui il suo lavoro è nullo:

$$L_N = 0$$

Il lavoro della forza peso è semplicemente uguale alla variazione dell'energia potenziale della trave:

$$L_P = mg\frac{l}{2}$$

Il lavoro dela forza $\boldsymbol{F}$, esercitata dalla gru, può essere trovato per differenza. Infatti, dal teorema delle forze vive, il lavoro totale svolto dalle forze esterne è uguale alla variazione di energia cinetica del corpo. Essendo l'energia cinetica una costante del moto, il lavoro totale delle forze esterne è nullo. Pertanto

$$L_F = L_{tot} - L_N - L_P = -mg\frac{l}{2}$$

Domanda 4

Per ricavare la reazione $\boldsymbol{N} = N\hat{\boldsymbol{e}}_y$, scriviamo la prima equazione cardinale della dinamica, utilizzando le Equazioni (1.29.3) e (1.29.4):

$$\begin{aligned} F_x &= m\ddot{x}_G \\ F_y + N - mg &= m\ddot{y}_G \end{aligned}$$

Abbiamo due equazioni e tre incognite (F_x, F_y e N). La terza equazione deriva dalla componente z della seconda equazione cardinale, le altre due componenti essendo nulle per un moto piano.

Prendiamo come polo il centro di massa. É conveniente considerare separatamente le due componenti F_x e F_y e scrivere il momento delle forze come

$$\boldsymbol{M}_G = \left(-F_x\frac{l}{2}\cos\theta - F_y\frac{l}{2}\sin\theta + N\frac{l}{2}\sin\theta\right)\hat{\boldsymbol{z}}$$

ma dato che la velocità angolare è costante il momento angolare rispetto al centro di massa non cambia, e quindi $\boldsymbol{M}_G = 0$. Dalla prima equazione cardinale troviamo

$$\begin{aligned} F_x &= m\ddot{x}_G \\ F_y &= m\ddot{y}_G + mg - N \end{aligned}$$

e sostituendo in $\boldsymbol{M}_G = 0$ otteniamo

$$-m\ddot{x}_G\cos\theta - (m\ddot{y}_G + mg - N)\sin\theta + N\sin\theta = 0$$

da cui

$$N = \frac{m}{2}\left(\ddot{x}_G\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \ddot{y}_G + g\right)$$

Inserendo le espressioni esplicite delle accelerazioni ottenute precedentemente abbiamo

$$N = \frac{mg}{2}\left(1 - \frac{l\omega_0^2}{g}\cos\theta\right)$$

Domanda 5

Se la trave rimane a contatto con il suolo si ha $N > 0$. Questo accade quando

$$\omega_0^2 < \frac{g}{l\cos\theta}$$

Perché questa condizione sia verificata a tutti gli angoli deve essere

$$\omega_0^2 < \frac{g}{l}$$

Domanda 6

Inseriamo N e le espressioni esplicite delle accelerazioni nelle espressioni trovate precedentemente per le componenti delle forze. Abbiamo

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{1}{2}ml\omega_0^2\sin\theta \\ F_y &= \frac{1}{2}mg \end{aligned}$$

La forza è applicata all'estremo A, che si muove solo verticalmente. Quindi il lavoro è

$$L_F = \int F_y dy = -\frac{1}{2}mgl$$

in accordo con il risultato trovato precedentemente.

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che il sistema è isolato termicamente il lavoro fatto su di esso deve essere uguale alla variazione dell'energia interna:

$$P_2\left(V_1 - V_2\right) = nc_V\left(T_2 - T_1\right)$$

D'altra parte nello stato di equilibrio iniziale e finale deve valere

$$\begin{aligned} P_1V_1 &= nRT_1 \\ P_2V_2 &= nRT_2 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi la temperatura iniziale

$$T_1 = \frac{P_1V_1}{nR}$$

e sostituendo i volumi nella Equazione troviamo

$$T_2 = \frac{\frac{P_2}{P_1} + \frac{c_V}{R}}{1 + \frac{c_V}{R}}T_1$$

La temperatura finale è quindi inferiore a quella iniziale, dato che $P_2/P_1 < 1$. Dato che $c_V/R = 3/2$ possiamo anche scrivere

$$T_2 = \frac{1}{5}\left(3 + 2\frac{P_2}{P_1}\right)T_1$$

Domanda 2

Dall'equazione di stato applicata al gas nella camera C abbiamo

$$P_2 V_1 = n_C R T_2$$

mentre per tutto il gas vale

$$P_2 V_2 = n R T_2$$

Dividendo membro a membro abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{n_C}{n} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}\frac{P_2}{P_1} &= \frac{1+\frac{c_V}{R}}{\frac{P_2}{P_1}+\frac{c_V}{R}} \\ &= \frac{5P_2}{3P_1+2P_2}\end{aligned}$$

Domanda 3

Anche se la trasformazione avviene molto lentamente, e istante per istante lo stato termodinamico dei gas nei due scomparti è ben definito, il processo è irreversibile. Infatti il processo inverso non avviene spontaneamente. Per verificare questa affermazione si può valutare la variazione di entropia del gas tra stato iniziale e stato finale. Abbiamo

$$\begin{aligned}\Delta S\left(\frac{P_2}{P_1}\right) &= n c_V \log\frac{T_2}{T_1} + nR\log\frac{V_2}{V_1} \\ &= nR\left[\left(1+\frac{c_V}{R}\right)\log\frac{T_2}{T_1}+\log\frac{P_1}{P_2}\right] \\ &= nR\left[\frac{5}{2}\log\frac{1}{5}\left(3+2\frac{P_2}{P_1}\right)-\log\frac{P_2}{P_1}\right]\end{aligned}$$

Chiaramente $\Delta S(1) = 0$, come si verifica direttamente. Inoltre

$$\frac{d}{dx}\Delta S(x) = nR\left[\frac{5}{2}\frac{1}{3+2x}-\frac{1}{x}\right]$$

e si trova che ΔS è una funzione decrescente di x per $0 < x < 1$. Quindi quando $P_2 < P_1$ l'entropia del sistema aumenta.

Domanda 4

Anche in questo caso non ci si aspetta che la trasformazione sia reversibile, dato che l'inversa non avviene spontaneamente. L'energia interna del gas non cambia, ma ad esso viene trasferito un calore Q. Dal primo principio abbiamo

$$P_2\left(V_1 - V_2\right) + Q = 0$$

da cuiQ

$$Q = P_2 (V_2 - V_1)$$

La variazione di entropia del gas sarà

$$\Delta S_{gas} = nR \log \frac{V_2}{V_1} = nR \log \frac{P_1}{P_2} > 0$$

Ma anche l'ambiente esterno varia la sua entropia, dato che è coinvolto in uno scambio di calore. In particolare sarà

$$\Delta S_{amb} = -\frac{Q}{T_1} = \frac{P_2}{T_1} (V_1 - V_2) = \frac{P_2 V_2}{T_1} \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right) = nR \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) < 0$$

La variazione di entropia dell'universo sarà

$$\Delta S \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = \Delta S_{gas} + \Delta S_{amb} = nR \left[\left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) - \log \frac{P_2}{P_1} \right]$$

Ancora una volta $\Delta S = 0$ se $P_2/P_1 = 1$. Inoltre derivando rispetto al rapporto delle pressioni troviamo

$$\frac{d}{dx} \Delta S (x) = nR \left(1 - \frac{1}{x} \right)$$

Segue che ΔS è minima per $P_2 = P_1$, e quindi è aumentata nella trasformazione considerata.

Domanda 5

Indichiamo con V_f e T_f il volume e la temperatura finale del gas. Ripetendo il ragionamento fatto rispondendo alla prima domanda abbiamo

$$\begin{aligned} P_1 (V_2 - V_f) &= nR (T_f - T_2) \\ P_1 V_f &= nRT_f \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\left(\frac{P_1}{P_2} \frac{\frac{P_2}{P_1} + \frac{c_V}{R}}{1 + \frac{c_V}{R}} T_1 - T_f \right) = \left(T_f - \frac{\frac{P_2}{P_1} + \frac{c_V}{R}}{1 + \frac{c_V}{R}} T_1 \right)$$

ossia

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{P_1}{P_2} \right) \frac{\frac{P_2}{P_1} + \frac{c_V}{R}}{1 + \frac{c_V}{R}} T_1 \\ &= \frac{1}{5} \left(1 + \frac{P_1}{P_2} \right) \left(\frac{P_2}{P_1} + \frac{3}{2} \right) T_1 \end{aligned}$$

La temperatura finale è dunque diversa da quella iniziale (a parte il caso ovvio $P_2 = P_1$). Per verificare se il risultato è accettabile calcoliamo il volume finale. Abbiamo

$$\begin{aligned}
V_F\left(\frac{P_1}{P_2}\right) &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{P_1}{P_2}\right)\frac{\frac{P_2}{P_1}+\frac{c_V}{R}}{1+\frac{c_V}{R}}\frac{nRT_1}{P_1} \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{P_1}{P_2}\right)\frac{\frac{P_2}{P_1}+\frac{c_V}{R}}{1+\frac{c_V}{R}}V_1 \\
&= 5\left(1+\frac{P_1}{P_2}\right)\left(\frac{P_2}{P_1}+\frac{3}{2}\right)V_1
\end{aligned}$$

Abbiamo $V_F(1) = V_1$. Inoltre

$$\frac{d}{dx}V_F(x) = 5\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{x^2}\right)V_1$$

che è crescente per $x > \sqrt{2/3}$. Di conseguenza il gas non rientra interamente nello scomparto C, possiamo ignorare l'effetto meccanico del setto poroso e l'analisi svolta è sensata.