1.30. 2 settembre 2015

Primo problema

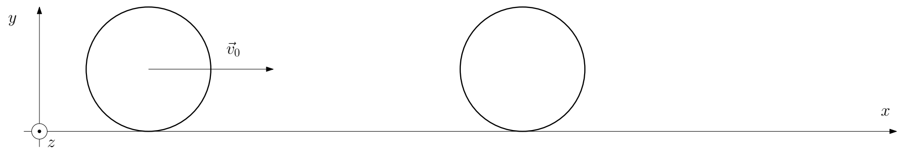

Figura 1.22.: I due cilindri nella situazione iniziale considerata nel problema.

Due cilindri di uguale raggio R hanno masse M_1 e M_2 e momenti di inerzia I_1 e I_2 rispetto al loro asse. In entrambi i casi la massa è distribuita in modo tale che le densità volumetriche rispettive ρ_1 e ρ_2 dipendano solo dalla distanza r dall'asse e non dalla quota né dall'azimut nei cilindri: $\rho_1 = \rho_1(r)$ e $\rho_2 = \rho_2(r)$.

I cilindri, paralleli e allineati tra loro, sono appoggiati su un piano orizzontale e, grazie ad un opportuno ingranaggio, sono vincolati a muoversi su di esso con un moto di rotolamento puro.

Inizialmente il cilindro a destra in figura (M_2, I_2) è in quiete, mentre quello a sinistra (M_1, I_1) ha una velocità del centro di massa uguale a $\vec{v}_0 = v_0\hat{x}$.

Tra i due cilindri non vi è attrito, e ad un certo istante si ha un urto elastico.

1. Si considerino le reazioni vincolari del piano orizzontale sui cilindri e si spieghi se durante l'urto queste reazioni siano impulsive o meno.

2. Se $M_1 = M_2$ e $I_1 = I_2$, quali sono le velocità dei centri di massa dei cilindri dopo l'urto?

3. Sempre nel caso $M_1 = M_2$ e $I_1 = I_2$ si consideri la forza impulsiva che il primo cilindro esercita sul secondo e si calcoli l'impulso di questa forza.

4. Calcolare le velocità finali dei centri di massa dei due cilindri per M_1, M_2, I_1 e I_2 qualsiasi.

5. Per quale relazione generale tra M_1, M_2, I_1 e I_2 il primo cilindro è fermo dopo l'urto? Fornire un esempio di distribuzioni di massa che soddisfino tale relazione, nonostante sia $\rho_1(r) \neq \rho_2(r)$.

Secondo problema

Un recipiente cilindrico impermeabile al calore di volume V_0 contiene una miscela di n_1 moli di un gas perfetto monoatomico e di n_2 moli di un gas perfetto biatomico. All'interno del recipiente si trova un setto scorrevole che può essere manovrato dall'esterno. Inizialmente il setto si trova ad una estremità del recipiente, e tutto il volume disponibile è riempito dalla miscela di gas, ad una temperatura iniziale T_0. Considerando V_0, T_0, n_1 e n_2 come quantità note

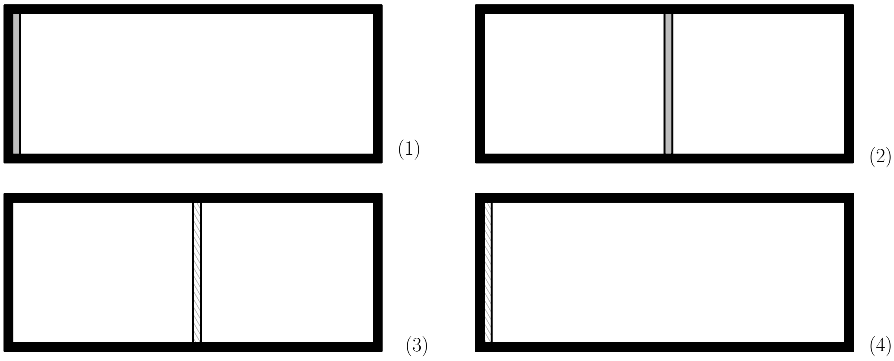

Figura 1.23.: La sequenza di trasformazioni considerate nel problema. Il setto è permeabile al gas nelle immagini (3) e (4).

1. Calcolare il lavoro necessario per spostare reversibilmente il setto in modo da dividere il recipiente in due parti di uguale volume.

2. Nello stato raggiunto precedentemente la miscela di gas occupa solo una delle due metà del recipiente. Improvvisamente, mentre il setto viene mantenuto fermo a metà cilindro, esso diviene permeabile al gas monoatomico (ma non a quello biatomico). Calcolare la pressione nelle due parti, quando si raggiunge nuovamente l'equilibrio termodinamico.

3. Adesso si sposta nuovamente e reversibilmente il setto, che rimane permeabile al gas monoatomico, verso l'estremità nella quale si trovava inizialmente. Calcolare la temperatura finale del sistema e la sua variazione di entropia rispetto alla condizione iniziale del problema.

4. Quanto vale il lavoro complessivo fatto sul sistema in tutte le trasformazioni precedenti, in particolare nel caso $n_1 = 0$ e $n_2 = 0$?

5. Se T_m è la temperatura minima di tutte le sorgenti termiche disponibili, quanto vale l'energia che è diventata permanentemente inutilizzabile per compiere lavoro? Si mostri schematicamente come si potrebbe organizzare, alternativamente, una trasformazione che porti il gas nello stesso stato finale, ma, senza degradare l'energia, la trasformi invece tutta in lavoro (la quantità di lavoro prodotto deve essere pari all'energia che nel testo diviene inutilizzabile).

Soluzione primo problema

Domanda 1

La reazione vincolare sul secondo cilindro deve essere impulsiva. Se non lo fosse, l'unica forza impulsiva agente sarebbe quella di contatto con il primo cilindro. Considerando un polo posto sull'asse, vediamo che questa avrebbe momento nullo. Di conseguenza il centro di massa si metterebbe in moto ma il cilindro non ruoterebbe, in contrasto con il vincolo di rotolamento puro. In modo del tutto analogo si può concludere che anche la reazione vincolare sul primo cilindro deve essere impulsiva: in caso contrario la velocità del cenro di massa cambierebbe, ma non la velocità angolare, quindi anche in questo caso il vincolo di rotolamento puro non sarebbe rispettato.

Domanda 2

Poniamoci in un sistema di riferimento che si muove verso destra con velocità $\frac{1}{2}v_0\hat{e}_x$. Prima dell'urto abbiamo due cilindri identici che si muovono l'uno verso l'altro con velocità rispettivamente $\frac{1}{2}v_0\hat{e}_x$ e $-\frac{1}{2}v_0\hat{e}_x$. Scegliendo opportunamente l'origine, possiamo fare in modo che l'urto avvenga in essa. Se ruotiamo il sistema di 180° attorno all'asse y, otteniamo un sistema indistinguibile. Questo significa che se indichiamo con $v_1\hat{e}_x$ e $v_2\hat{e}_x$ le velocità dei cilindri dopo l'urto (univocamente determinate) dovrà valere

$$v_1 = -v_2$$

cioè anche dopo l'urto le velocità dovranno essere opposte tra loro. Inoltre per la conservazione del'energia dovra essere

$$v_1 = -v_2 = \pm\frac{v_0}{2}$$

Scartando la soluzione $v_1 = v_0/2$ (corrispondente ad assenza di urto) avremo, nel sistema di riferimento iniziale,

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= 0 \\ \vec{v}_2 &= v_0\hat{e}_x \end{aligned}$$

cioè i due cilindri hanno scambiato tra loro le velocità.

Alternativamente si potrebbe ottenere la soluzione dalle equazioni del moto, come mostrato nella risposta alla quarta domanda.

Domanda 3

Consideriamo la variazione del momento angolare del cilindro inizialmente fermo, che dopo l'urto avrà una velocità angolare $\omega_2\hat{e}_z = -v_0/R\hat{e}_z$. Scegliendo come polo il punto di contatto con il suolo abbiamo

$$\Delta\vec{L}_2 = \left(I_2 + M_2R^2\right)\omega_2\hat{e}_z = -JR\hat{e}_z$$

dove $\vec{J} = J\hat{e}_x$ è l'impulso trasferito dal cilindro inizialmente in moto. Notare che $\vec{J}$ è diretto lungo l'asse x, data l'assenza di attrito tra i cilindri. Troviamo quindi

$$J = \left(M_2 + \frac{I_2}{R^2}\right)v_0$$

Da notare che se $I_2 \neq 0$ questa quantità è maggiore della variazione della quantità di moto del secondo cilindro, $\Delta\vec{P}_2 = M_2 v_0 \hat{e}_x$. La ragione è che al secondo cilindro viene ceduto impulso non solo dal primo, ma anche dalla reazione vincolare con il terreno. Questa è una ulteriore conferma che tale reazione è impulsiva.

Domanda 4

Il momento angolare del sistema rispetto ad un polo posto sul piano di appoggio si conserva. Infatti:

1. la reazione vincolare verticale su ciascun cilindro deve essere uguale e opposta alla sua forza peso, dato che i centri di massa non accelerano verticalmente;

2. dovunque sia posto il polo, le due forze uguali e opposte considerate precedentemente hanno lo stesso braccio (la forza peso è applicata al centro di massa che è sulla verticale del punto di appoggio). Quindi anche il loro momento si annulla;

3. le uniche altre forze esterne sono le componenti orizzontali delle reazioni vincolari, che hanno braccio nullo.

Abbiamo quindi che durante l'urto

$$\Delta\left(\vec{L}_1 + \vec{L}_2\right) = 0$$

dove i momenti angolari dei due cilindro sono

$$\begin{aligned}
\vec{L}_i &= M_i \left(R\hat{e}_y \wedge v_i \hat{e}_x\right) + I_i \omega_i \hat{e}_z \\
&= -M_i R v_i \hat{e}_z + I_i \omega_i \hat{e}_z \\
&= -\left(M_i R^2 + I_i\right) \frac{v_i}{R} \hat{e}_z \\
&\equiv -I_i^* \frac{v_i}{R} \hat{e}_z
\end{aligned}$$

e dunque

$$-I_1^* \frac{v_0}{R} = -I_1^* \frac{v_1}{R} - I_2^* \frac{v_2}{R}$$

dove v_1 e v_2 sono le velocità del centro di massa dei cilindri dopo l'urto. D'altra parte per la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2} I_1^* \frac{v_0^2}{R^2} = \frac{1}{2} I_1^* \frac{v_1^2}{R^2} + \frac{1}{2} I_2^* \frac{v_2^2}{R^2}$$

In conclusione abbiamo le due relazioni

$$\begin{aligned}
v_0 - v_1 &= \frac{I_2^*}{I_1^*} v_2 \\
v_0^2 - v_1^2 &= \frac{I_2^*}{I_1^*} v_2^2
\end{aligned}$$

Scartando la soluzione non rilevante $v_1 = v_0$ e dividendo membro a membro la seconda equazione per la prima otteniamo

$$\begin{aligned} v_0 - v_1 &= \frac{I_2^*}{I_1^*} v_2 \\ v_0 + v_1 &= v_2 \end{aligned}$$

e risolvendo

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{2I_1^*}{I_1^* + I_2^*} v_0 \\ v_1 &= \frac{I_1^* - I_2^*}{I_1^* + I_2^*} v_0 \end{aligned}$$

Se i cilindri sono identici $I_1^* = I_2^*$ e ritroviamo la soluzione ottenuta nella risposta alla prima domanda con considerazioni di simmetria.

Domanda 5

Dalla soluzione al quesito precedente vediamo che deve essere $I_1^* = I_2^*$. Un esempio possibile è il seguente. Il primo cilindro ha una massa M_1 interamente concentrata sull'asse, quindi $I_1 = 0$ e $I_1^* = M_1 R^2$. Il secondo ha una densità di massa costante, e quindi

$$I_2^* = M_2 R^2 + \frac{1}{2} M_2 R^2$$

Scegliendo $M_1 = \frac{3}{2} M_2$ otteniamo la relazione voluta.

Soluzione secondo problema

Domanda 1

La trasformazione del gas è adiabatica e reversibile, e quindi

$$\begin{aligned} 0 &= (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2})\, dT + P dV \\ &= (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2})\, dT + (n_1 + n_2)\, RT \frac{dV}{V} \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{dT}{T} + \frac{(n_1 + n_2)\, R}{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}} \frac{dV}{V} = 0$$

Integrando otteniamo

$$\log T V^{\gamma - 1} = \text{costante}$$

con

$$\gamma - 1 = \frac{(n_1 + n_2)\, R}{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{n_1 c_{P1} + n_2 c_{P2}}{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}} \\ &= \frac{5n_1 + 7n_2}{3n_1 + 5n_2}\end{aligned}$$

Possiamo calcolare il lavoro W fatto sul sistema direttamente, dato che per una adiabatica

$$W = \Delta U = (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2})(T_1 - T_0)$$

dove T_1 è la temperatura finale e

$$T_0 V_0^{\gamma-1} = T_1 \left(\frac{V_0}{2}\right)^{\gamma-1}$$

Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned}W &= (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2})\left(2^{\gamma-1} - 1\right) T_0 \\ &= (n_1 + n_2) R T_0 \frac{2^{\gamma-1} - 1}{\gamma - 1}\end{aligned}$$

Domanda 2

Anche questo processo è adiabatico, e sul sistema non viene fatto lavoro. L'energia interna non cambia: detta T_2 la temperatura nel nuovo stato di equilibrio finale, avremo

$$(n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}) T_1 = (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}) T_2$$

cioè $T_1 = T_2$. La pressione nello scompartimento di sinistra sarà data da

$$P_L = \frac{n_1}{2} R T_1 \left(\frac{V_0}{2}\right)^{-1} = n_1 \frac{R T_0}{V_0} 2^{\gamma-1}$$

e in quello di destra da

$$P_R = \left(\frac{n_1}{2} + n_2\right) R T_1 \left(\frac{V_0}{2}\right)^{-1} = (n_1 + 2n_2) \frac{R T_0}{V_0} 2^{\gamma-1}$$

Notare che questa è la somma del contributo del gas monoatomico e di quello biatomico: quest'ultima vale

$$P_2 = n_2 \frac{R T_0}{V_0} 2^{\gamma}$$

Domanda 3

Si tratta nuovamente di una adiabatica. Considerando che il gas monoatomico continua a occupare l'intero volume e quindi non fa lavoro abbiamo dal primo principio

$$0 = (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2})\, dT + P_2 dV$$

dove V è il volume dello scompartimento a destra e P_2 la pressione del gas biatomico. Quindi

$$0 = (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2})\, dT + n_2 RT \frac{dV}{V}$$

e come in precedenza

$$TV^{\gamma'-1} = \text{costante}$$

dove

$$\begin{aligned}\gamma' &= \frac{n_1 c_{V1} + n_2 c_{P2}}{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}}\\ &= \frac{3n_1 + 7n_2}{3n_1 + 5n_2} = \gamma - \frac{2n_1}{3n_1 + 5n_2}\end{aligned}$$

Per la temperatura finale T_f abbiamo quindi (ricordare che $T_1 = T_2$)

$$T_1 \left(\frac{V_0}{2}\right)^{\gamma'-1} = T_f \left(V_0\right)^{\gamma'-1}$$

cioè

$$T_f = \frac{1}{2^{\gamma'-1}} T_1 = 2^{\gamma-\gamma'} T_0$$

e dato che il volume è invariato la variazione di entropia sarà

$$\begin{aligned}\Delta S &= (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}) \log \frac{T_f}{T_0}\\ &= (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}) \log \frac{2^{\gamma-1}}{2^{\gamma'-1}}\end{aligned}$$

Dato che $\gamma > \gamma'$ si ha, come ci si poteva aspettare, $\Delta S > 0$

$$\begin{aligned}\Delta S &= (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}) \frac{2n_1}{3n_1 + 5n_2} \log 2\\ &= n_1 R \log 2\end{aligned}$$

Notare che questa è la variazione di entropia dell'espansione libera (da $V_0/2$ a V_0) del solo gas monoatomico. Questa è l'unica trasformazione irreversibile del processo.

Domanda 4

Il lavoro complessivo si ottiene come nella prima domanda da

$$\begin{aligned} W_{tot} = \Delta U &= (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2})(T_f - T_0) \\ &= (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}) \left(\frac{2^{\gamma-1}}{2^{\gamma'-1}} - 1 \right) T_0 \\ &= \frac{1}{\gamma' - 1} \left(2^{\gamma-\gamma'} - 1 \right) n_2 R T_0 \end{aligned}$$

Chiaramente $W_{tot} > 0$, quindi complessivamente si è fatto sul sistema un lavoro positivo.

Se $n_1 = 0$ il gas monoatomico non è presente, quindi sia la compressione che l'espansione sono la stessa adiabatica reversibile percorsa nei due sensi. Deve quindi essere $W_{tot} = 0$. Questo si verifica direttamente dalla formula precedente, tenendo conto che nel caso considerato $\gamma = \gamma'$. Se $n_2 = 0$ il lavoro nella trasformazione di espansione si annulla, e il lavoro totale è solo quello fatto durante la compressione

$$W_{tot} = n_1 R T_0 \frac{2^{\gamma-1} - 1}{\gamma - 1}$$

con $\gamma = 5/3$.

Domanda 5

Per portare il sistema reversibilmente nello stato finale possiamo procedere in due passi:

1. con una compressione adiabatica reversibile portiamo la miscela di gas alla temperatura finale richiesta T_f. Per fare questo dovremo comprimere fino ad un volume V determinato da

$$T_0 V_0^{\gamma-1} = T_f V^{\gamma-1}$$

cioè

$$V = \left(\frac{T_0}{T_f} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_0 = 2^{\frac{\gamma'-\gamma}{\gamma-1}} V_0$$

Il lavoro fatto dalla miscela in questa fase è uguale a parte il segno al lavoro totale fatto nella trasformazione completa considerata alla domanda precedente,

$$L_1 = -W_{tot} = -\Delta U < 0$$

Notare che l'entropia della miscela non cambia in questa fase;

2. adesso con una espansione isoterma riportiamo il volume al valore iniziale. Il lavoro fatto in questa fase è

$$L_2 = Q_{ass} = -T_f \Delta S_s = T_f \Delta S$$

dove Q_{ass} è il calore assorbito dalla miscela (e ceduto dalla sorgente a temperatura T_f con la quale deve essere mantenuto l'equilibrio termodinamico), ΔS_s la variazione di entropia della sorgente e ΔS quella della miscela ($\Delta S + \Delta S_s = 0$ dato che la trasformazione è reversibile).

In conclusione rispetto al lavoro $L_1 = -W_{tot}$ fatto dal gas nella trasformazione considerata precedentemente, abbiamo ottenuto un lavoro aggiuntivo

$$L_2 = T_f \Delta S$$

in accordo con la formula generale per l'energia non più utilizzabile $T_m \Delta S$, dato che serve una unica sorgente esterna e quindi $T_f = T_m$.