1.32. 4 febbraio 2016

Primo problema

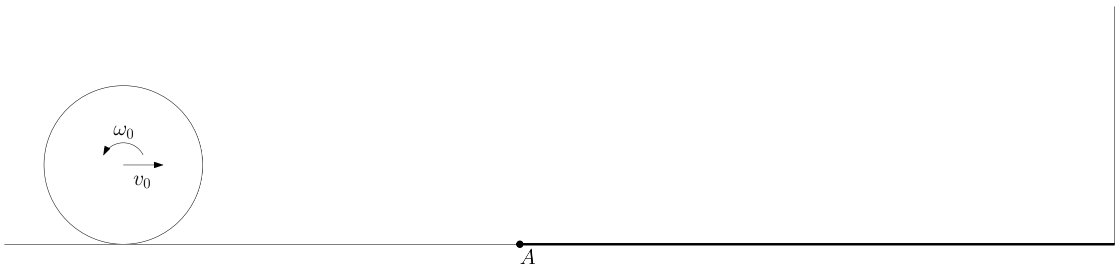

Figura 1.25.: Il cilindro sul piano orizzontale considerato nel problema.

Un cilindro omogeneo di massa m e raggio R viene lanciato su un piano orizzontale e privo di attrito con velocità del centro di massa iniziale v_0 e velocità angolare iniziale ω_0. Consideriamo positivi i versi di v_0 e ω_0 indicati in Figura 1.25. A destra di A il piano presenta notevole attrito (da assimilare a infinito) per cui il cilindro è vincolato a un moto di rotolamento puro.

1. Fissata la velocità v_0 determinare, se possibile, i valori ω_0 per i quali nel passaggio per A il moto traslatorio del cilindro si inverte.

2. Supponendo che inizialmente $\omega_0 = 0$, calcolare la variazione di energia nel passaggio dal lato sinistro al lato destro di A.

3. A destra di A si trova una parete verticale priva di attrito, sulla quale il cilindro rimbalza elasticamente. Al momento dell'urto con la parete, individuare punto di applicazione e direzione delle forze impulsive, sempre nel caso $\omega_0 = 0$.

4. Determinare l'impulso trasferito al cilindro dalla parete.

Secondo problema

Un cilindro provvisto di un pistone scorrevole contiene n moli di un gas perfetto monoatomico. Il gas viene sottoposto alla trasformazione ciclica quasistatica descritta in Figura 1.26.

1. Calcolare il volume V_C, e il lavoro che è necessario fornire per eseguire il ciclo.

2. Si dispone di una sorgente esterna alla temperatura T_B, che viene utilizzata per eseguire la trasformazione. L'adiabatica e l'isoterma sono reversibili. Per ottenere l'isocora, si pone il sistema nello stato A a contatto termico con la sorgente mediante una opportuna resistenza termica in modo che il calore fluisca molto lentamente. Calcolare l'aumento di entropia dell'universo dopo un ciclo.

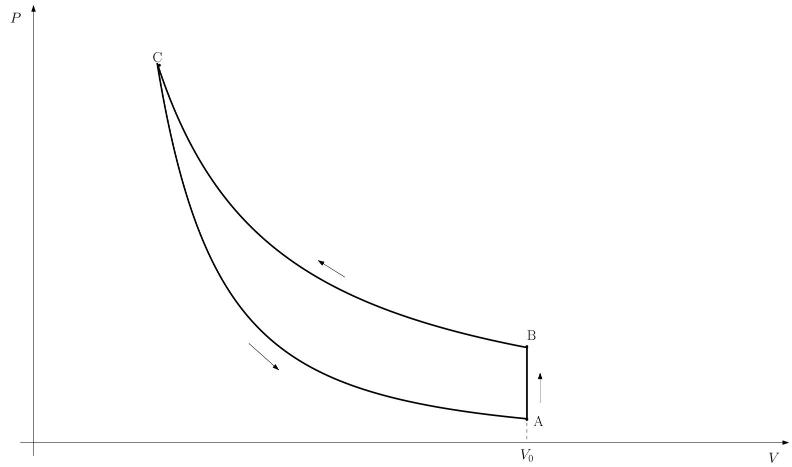

Figura 1.26.: La trasformazione termodinamica del problema. Dallo stato A (temperatura T_A e volume V_0), viene eseguita una trasformazione isocora fino allo stato B (temperatura T_B). Segue una compressione isoterma $B \to C$ e una compressione adiabatica $C \to A$. I parametri T_A, T_B e V_0 sono noti.

3. Si vuole adesso operare in modo reversibile. Per farlo si utilizza una macchina termica reversibile che utilizza il gas come sorgente fredda e la sorgente a temperatura T_B come sorgente calda per effettuare la trasformazione $A \to B$ in modo controllato. Calcolare il lavoro che è possibile ottenere dalla macchina termica in un ciclo.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Al momento del passaggio su A le uniche forze impulsive sono le reazioni vincolari applicate al punto di contatto. Di conseguenza si conserva il momento angolare rispetto al polo A. Possiamo dunque scrivere

$$-mv_0R + I\omega_0 = \left(I + mR^2\right)\omega$$

dove $I = mR^2/2$ è il momento di inerzia del cilindro rispetto all'asse passante per il centro di massa e ω la velocità angolare finale. Abbiamo scritto il momento angolare successivamente al contatto con A come momento di puro rotolamento attorno al punto di contatto e usato il teorema di Steiner. Segue che

$$\omega = \frac{I\omega_0 - mv_0R}{I + mR^2} \tag{1.32.1}$$

Il moto del cilindro si inverte se e solo se $\omega > 0$, data la condizione di puro rotolamento. Deve quindi essere

$$\omega_0 > \frac{mv_0R}{I} = \frac{2v_0}{R}$$

Domanda 2

Possiamo scrivere la variazione di energia nella forma

$$\Delta E = \frac{1}{2}m\left(v^2 - v_0^2\right) + \frac{1}{2}I\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)$$

dove v e ω sono le velocità del centro di massa e angolari dopo il passaggio su A. Usando la formula (1.32.1) troviamo

$$\omega = \frac{I\omega_0 - mv_0R}{I + mR^2}, \qquad v = -\omega R$$

e sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \frac{1}{2}m\left(v - v_0\right)\left(v + v_0\right) + \frac{1}{2}I\left(\omega - \omega_0\right)\left(\omega + \omega_0\right) \\
&= \frac{1}{2}m\left(R\frac{I\omega_0 - mv_0R}{I + mR^2} - v_0\right)\left(R\frac{I\omega_0 - mv_0R}{I + mR^2} + v_0\right) \\
&+ \frac{1}{2}I\left(\frac{I\omega_0 - mv_0R}{I + mR^2} - \omega_0\right)\left(\frac{I\omega_0 - mv_0R}{I + mR^2} + \omega_0\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{mI}{\left(I + mR^2\right)}\left(R\omega_0 + v_0\right)^2 \\
&= -\frac{1}{6}m\left(R\omega_0 + v_0\right)^2
\end{aligned}$$

Notare che la variazione dell'energia non è mai positiva, ed è proporzionale al quadrato della velocità del punto di contatto prima di A. In particolare $\Delta E = 0$ se il cilindro si trova inizialmente in una condizione di puro rotolamento. Ponendo $\omega_0 = 0$ troviamo il risultato cercato:

$$\Delta E = -\frac{1}{6}mv_0^2$$

Domanda 3

Dato che la velocità del centro di massa deve cambiare segno e che deve restare verificata la condizione di rotolamento puro

$$v = -\omega R$$

è necessario che anche la velocità angolare cambi segno. Quindi il momento angolare rispetto al centro di massa, negativo prima dell'urto, deve divenire positivo. Dato che la reazione della parete ha momento nullo rispetto al centro di massa del cilindro, la reazione nel punto di contatto deve avere una componente impulsiva orizzontale e diretta verso destra (il suo momento impulsivo deve essere positivo).

La forza impulsiva nel punto di contatto dovrebbe far aumentare la quantità di moto, che in realtà cambia segno. Quindi deve essere presente anche una reazione impulsiva orizzontale della parete, che dovrà essere diretta verso sinistra (e maggiore in valore assoluto di quella del punto di contatto).

Domanda 4

A destra di A abbiamo

$$\omega=-\frac{mv_0R}{I+mR^2}=-\frac{2}{3}\frac{v_0}{R}$$

Scriviamo l'energia nella forma

$$E=\frac{1}{2}\left(I+mR^2\right)\omega^2$$

ma se l'urto è elastico questa si conserva, e quindi la velocità angolare cambia segno. La variazione del momento angolare rispetto ad un polo preso nel punto di contatto è

$$\Delta L=-2\left(I+mR^2\right)\omega$$

ma l'unica forza impulsiva con momento non nullo è la reazione della parete, quindi deve essere

$$-2\left(I+mR^2\right)\omega=-RJ$$

e quindi

$$J=\frac{2\left(I+mR^2\right)}{R}\left(-\frac{2}{3}\frac{v_0}{R}\right)=-2mv_0$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Lo stato C è collegato da una isoterma allo stato B e da una adiabatica allo stato A. Quindi

$$V_CT_B^{\frac{1}{\gamma-1}}=V_0T_A^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

da cui

$$V_C=V_0\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}=V_0\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Il lavoro da fornire è dato da

$$L=L_{C\to B}+L_{A\to C}$$

dove

$$\begin{aligned}
L_{C\to B}&=\int_{V_C}^{V_0}PdV=nRT_B\log\frac{V_0}{V_C}\\
L_{A\to C}&=nc_V\left(T_A-T_B\right)
\end{aligned}$$

da cui

$$L=\frac{3}{2}nR\left[T_B\log\frac{T_B}{T_A}-\left(T_B-T_A\right)\right]$$

Domanda 2

La variazione di entropia del gas è

$$\Delta S_{gas} = nc_V \log \frac{T_B}{T_A}$$

mentre quella della sorgente a temperatura T_B

$$\Delta S_B = -\frac{Q}{T_B} = -nc_V \frac{1}{T_B}(T_B - T_A)$$

e quindi

$$\Delta S = nc_V \left[\log \frac{T_B}{T_A} - \frac{1}{T_B}(T_B - T_A)\right] = \frac{L}{T_B}$$

Domanda 3

Detto Q_1 il calore fornito al gas e Q_2 quello sottratto alla sorgente alla temperatura T_B abbiamo dal primo principio

$$W = Q_2 - Q_1 = Q_2 - nc_V(T_B - T_A)$$

Per operare reversibilmente deve essere $\Delta S = 0$, quindi

$$\int_{T_A}^{T_B} \frac{nc_V dT}{T} - \frac{Q_2}{T_B} = 0$$

cioè

$$Q_2 = nc_V T_B \log \frac{T_B}{T_A}$$

e quindi

$$W = nc_V \left[T_B \log \frac{T_B}{T_A} - (T_B - T_A)\right] = L$$