1.34. 27 Giugno 2016

Problema 1

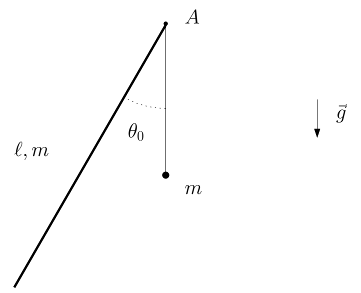

Figura 1.28.: La sbarra e il pendolo, nella configurazione iniziale.

Una sbarra sottile di massa m e lunghezza ℓ è vincolata ad un suo estremo in un punto A, attorno al quale è libera di girare. Sempre ad A è fissato un pendolo ideale di massa m e lunghezza $d < \ell$, come in Figura 1.28. Inizialmente il pendolo è in quiete nella sua posizione di equilibrio, e la sbarra è ferma ma inclinata rispetto alla verticale di un angolo θ_0. Si lascia libera la sbarra, che urta elasticamente la massa del pendolo.

1. Considerando noti i valori di θ_0, ℓ e m determinare d in modo che dopo l'urto la sbarra sia in quiete.
2. Calcolare l'angolo massimo di inclinazione raggiunto successivamente dal pendolo, assumendo per esso la lunghezza d precedentemente determinata.
3. Invece del pendolo si ha adesso una seconda asta di massa m e lunghezza $x\ell$. Detto θ_0^* il valore minimo di θ_0 al quale la seconda asta compie un giro completo, determinare la funzione $\theta_0^*(x)$.
4. Per quale valore di x l'angolo θ_0^* assume il valore minimo?

Problema 2

Un elastico di gomma si può descrivere da un punto di vista termodinamico utilizzando la tensione τ, la lunghezza ℓ e la temperatura T. Si sa che valgono le leggi

$$\tau(\ell, T) = \frac{a\ell T}{\ell_0}\left[1 - \left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^3\right]$$
$$U(\ell, T) = CT$$

dove a, C sono costanti dalle opportune dimensioni e ℓ_0 è la lunghezza dell'elastico in assenza di tensione. Supponendo che in assenza di tensione l'elastico si trovi ad una temperatura $T = T_0$

1. Determinare la capacità termica a tensione costante $\tau = \tau_0$ dell'elastico.
2. Supponendo che in assenza di tensione $T = T_0$ determinare $T(\ell)$ per una trasformazione adiabatica reversibile.
3. Partendo dallo stato A con $T = T_0$ e $\ell = \ell_0$ si esegue un ciclo reversibile operando le seguenti trasformazioni: espansione adiabatica fino ad uno stato B con $T = T_1 > T_0$, espansione isoterma fino ad uno stato C, trasformazione adiabatica fino ad uno stato D ed infine trasformazione isoterma fino allo stato iniziale. Rappresentare il ciclo nel piano $S - T$ e dire quale è la sua efficienza.
4. Rappresentare il ciclo nel piano $\ell - T$ (convenzione: ℓ è l'ascissa e T l'ordinata).

Domanda 1 Dalla conservazione dell'energia e del momento angolare rispetto al punto di sospensione, nell'ipotesi che l'asta si fermi, deve essere

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}I\omega_0^2 &= \frac{1}{2}md^2\omega^2\\ I\omega_0 &= md^2\omega\end{aligned}$$

dove ω_0 è la velocità angolare dell'asta prima dell'urto. Dividendo membro a membro la prima equazione iniziale per il quadrato della seconda si trova

$$\frac{1}{I} = \frac{1}{md^2}$$

e dato che $I = m\ell^2/3$ troviamo

$$d^2 = \frac{1}{3}\ell^2$$

Notare che in questo caso particolare la velocità angolare immediatamente dopo l'urto è uguale a quella immediatamente prima dell'urto:

$$\omega = \frac{I}{md^2}\omega_0 = \frac{\ell^2}{3d^2}\omega_0 = \omega_0$$

Domanda 2 Assumendo il valore di d determinato precedentemente, dalla conservazione dell'energia segue subito che

$$-mg\frac{\ell}{2}\cos\theta_0 - mgd = -mgd\cos\theta - mg\frac{\ell}{2}$$

e quindi

$$(1-\cos\theta) = \frac{\ell}{2d}(1-\cos\theta_0)$$

oppure

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\ell}{2d}}\sin\frac{\theta_0}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin\frac{\theta_0}{2}$$

Domanda 3 Dalla conservazione dell'energia e del momento angolare adesso abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}I\omega_0^2 &= \frac{1}{2}I\omega_1^2 + \frac{1}{2}I'\omega_2^2\\ I\omega_0 &= I\omega_1 + I'\omega_2\end{aligned}$$

dove ω_1 è la velocità della prima asta immediatamente dopo l'urto, ω_2 quella della seconda. Risolvendo troviamo

$$\begin{aligned}I\left(\omega_0-\omega_1\right)\left(\omega_0+\omega_1\right) &= I'\omega_2^2\\ I\left(\omega_0-\omega_1\right) &= I'\omega_2\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\left(\omega_0+\omega_1\right) &= \omega_2\\ I\left(\omega_0-\omega_1\right) &= \frac{I'}{I}\omega_2\end{aligned}$$

Risolvendo troviamo

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{I'-I}{I'+I}\omega_0\\ \omega_2 &= \frac{2I}{I+I'}\omega_0\end{aligned}$$

Affinché la seconda asta faccia un giro completo è necessario che

$$\frac{1}{2}I'\omega_2^2 > mgd$$

ossia

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 > mgd\frac{\left(I+I'\right)^2}{4II'}$$

D'altra parte l'energia cinetica della prima asta immediatamente prima dell'urto vale

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = mg\frac{\ell}{2}\left(1-\cos\theta_0\right)$$

e quindi deve essere

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\theta_0^*}{2} &= \frac{d}{\ell}\frac{\left(I+I'\right)^2}{4II'}\\ &= \frac{\left(x^2+1\right)^2}{4x} = \frac{1}{4}\left(x^3+2x+\frac{1}{x}\right)\end{aligned} \tag{1.34.1}$$

Domanda 4 Derivando l'espressione (1.34.1) rispetto a x troviamo la condizione per il minimo valore dell'angolo

$$3x^4 + 2x^2 - 1 = 0$$

e quindi

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Il valore del minimo è

$$\sin^2 \frac{\theta_0^*}{2} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

cioè $\theta_0^* \simeq 122.7°$.

Problema 2

Domanda 1 Dal primo principio troviamo

$$dQ = dU - \tau d\ell = CdT - \tau \left(\frac{\partial \ell}{\partial T}\right)_\tau dT$$

e quindi

$$C_\tau = C - \tau \left(\frac{\partial \ell}{\partial T}\right)_\tau$$

Per calcolare la derivata possiamo scrivere

$$T = \frac{\tau_0}{a} \frac{1}{\left[\frac{\ell}{\ell_0} - \left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^2\right]}$$

da cui

$$\left(\frac{\partial \ell}{\partial T}\right)_\tau = \left(\frac{\partial T}{\partial \ell}\right)_\tau^{-1} = -\frac{a\ell_0}{\tau_0} \frac{\left[1 - \left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^3\right]^2}{\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)\left[2 + \left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^3\right]}$$

Quindi

$$C_\tau = C + a\ell_0 \frac{\left[1 - \left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^3\right]^2}{\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)\left[2 + \left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^3\right]}$$

Domanda 2 Ponendo $dQ = 0$ nell'espressione del primo principio troviamo

$$CdT = \tau d\ell$$

e quindi

$$\frac{dT}{T} = \frac{a\ell}{C\ell_0}\left[1 - \left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^3\right] d\ell$$

Integrando otteniamo

$$\log\frac{T}{T_0} = \frac{a\ell_0}{C}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^2 + \left(\frac{\ell_0}{\ell}\right) - \frac{3}{2}\right]$$

e quindi

$$T = T_0 \exp\left\{\frac{a\ell_0}{C}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^2 + \left(\frac{\ell_0}{\ell}\right) - \frac{3}{2}\right]\right\}$$

Notiamo che la funzione $T(\ell)$ ha un minimo quando

$$\frac{\ell}{\ell_0} - \left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^2 = 0$$

cioè per $\ell = \ell_0$.

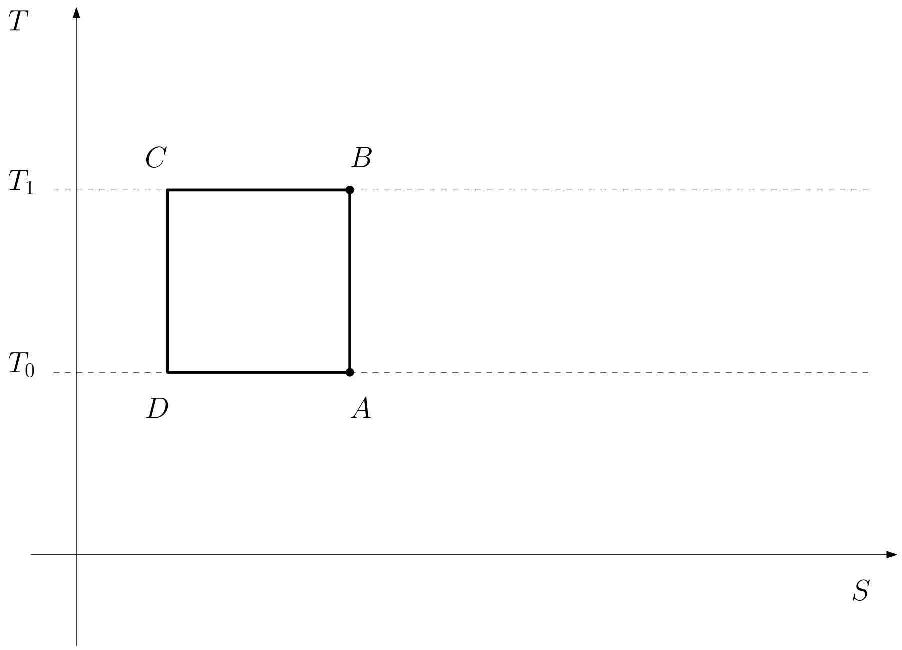

Figura 1.29.: Il ciclo rappresentato nel piano $S-T$. Notare che per ottenere lavoro positivo il verso di percorrenza deve essere invertito rispetto a quello indicato.

Domanda 3 Il ciclo è un ciclo di Carnot, quindi si rappresenta nel piano $S - T$ come un rettangolo, come in Figura (1.29). Il rendimento è quindi

$$\eta = 1 - \frac{T_0}{T_1}$$

Il verso di percorrenza si determina osservando che in una espansione isoterma

$$dS = \frac{dQ}{T} = -\frac{\tau d\ell}{T}$$

e quindi l'entropia diminuisce (per $\tau > 0$): l'elastico cede calore.

Domanda 4 Il ciclo si rappresenta nel piano $\ell - T$ notando che le isoterme sono rette orizzontali, e le adiabatiche corrispondono alla funzione $T(\ell)$ determinata precedentemente. Il grafico è riportato qualitativamente in Figura (1.30)

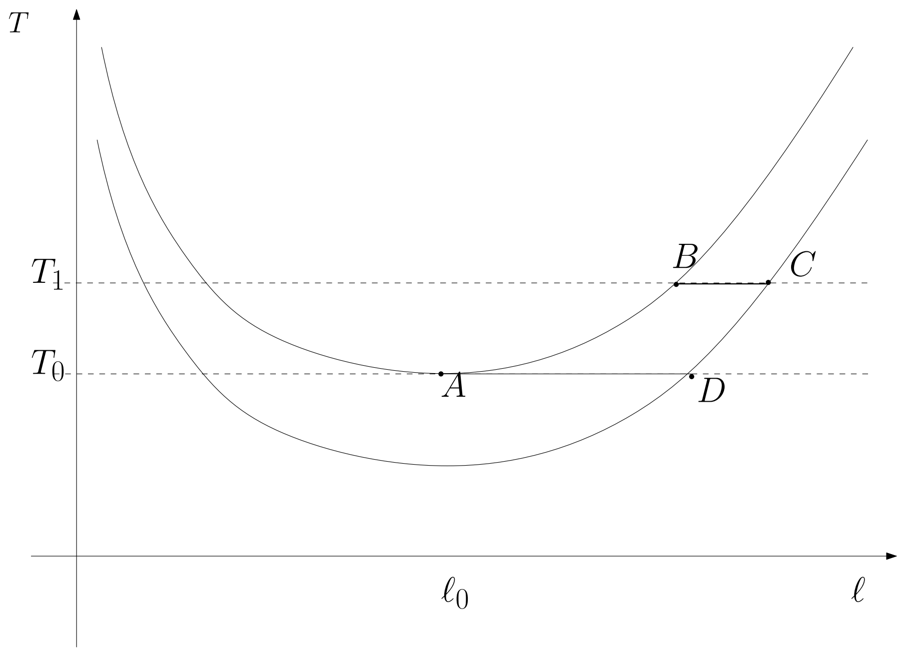

Figura 1.30.: Il ciclo considerato nel piano $\ell - T$.