1.37. 6 febbraio 2017

Esercizio 1

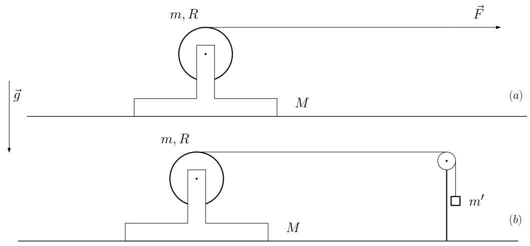

Figura 1.34.: Il sistema descritto nel problema.

Un supporto di massa M è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito. Sul supporto è montato un cilindro di massa m e raggio R, libero di ruotare attorno al proprio asse. Un filo inestensibile di massa trascurabile è avvolto attorno al cilindro, e all'estremo libero è applicata una forza $\vec{F}$ costante che lo mantiene orizzontale, come in Figura 1.34-(a).

1. Si blocca il supporto a terra. Se inizialmente il cilindro è fermo, calcolare la sua velocità angolare quando il filo si è srotolato di un tratto ℓ.

2. Il supporto viene lasciato libero di muoversi. Calcolare la sua accelerazione.

3. Calcolare l'accelerazione angolare del cilindro, ancora nel caso in cui il supporto è libero di muoversi.

4. Ad un certo momento la rotazione del cilindro viene impedita: quanto vale da quel momento l'accelerazione del supporto?

5. Calcolare l'accelerazione del supporto e l'accelerazione angolare del cilindro se il sistema è modificato come nella Figura 1.34-(b).

6. Sempre per il sistema in Figura 1.34-(b), quanto vale l'accelerazione del supporto se la rotazione del cilindro viene impedita?

Esercizio 2

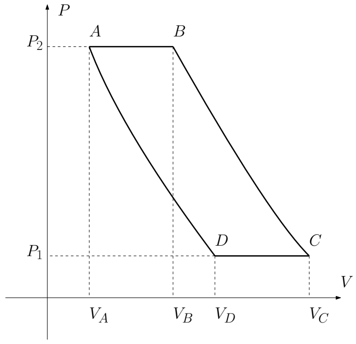

Figura 1.35.: La trasformazione considerata nell'esercizio.

Si consideri la trasformazione ciclica rappresentata in figura, costituita da due trasformazioni isobare e due trasformazioni adiabatiche di n moli di un gas monoatomico. Le pressioni delle trasformazioni isobare P_1 e P_2 sono note, ed anche i volumi V_A e $V_B = 2V_A$.

1. Calcolare i volumi V_C e V_D, e la temperatura massima e minima raggiunta dal gas durante il ciclo, nell'ipotesi che tutte le trasformazioni siano reversibili.

2. Calcolare il rendimento del ciclo, ed esprimerlo in funzione del rapporto $\rho = P_1/P_2$.

3. Si consideri adesso un ciclo modificato, nel quale la pressione applicata esternamente varia bruscamente da P_2 a P_1 (sulla adiabatica $B \to C$) e da P_1 a P_2 (sulla adiabatica $D \to A$). Ancora una volta sono noti P_1, P_2, V_A e V_B. Calcolare nuovamente V_C e V_D.

4. Per quali valori di ρ il ciclo modificato ha rendimento positivo?

Soluzione esercizio 1

Domanda 1 Possiamo applicare il teorema delle forze vive: la variazione dell'energia cinetica del cilindro è uguale al lavoro fatto. Quindi

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = F\ell$$

Dato che $I = mR^2/2$ troviamo

$$\omega^2 = \sqrt{\frac{4F\ell}{mR^2}}$$

Domanda 2 L'accelerazione del supporto è la stessa dell'accelerazione del centro di massa del sistema, dunque

$$a_s = \frac{F}{M+m}$$

Domanda 3 Per quanto riguarda l'accelerazione angolare del cilindro, sarà

$$\alpha_c = -\frac{FR}{I} = -\frac{2F}{mR}$$

Domanda 4 Se la rotazione del corpo viene impedita l'equazione scritta per il centro di massa (domanda 2) resta valida, e quindi a_s ha lo stesso valore calcolato precedentemente.

Domanda 5 In questo caso

$$\begin{aligned}(M+m)a_s &= T \\ I\alpha_c &= -TR \\ m'\left(a_s - \alpha_c R\right) &= m'g - T\end{aligned}$$

dove T è la forza dovuta alla tensione del filo. Risolvendo troviamo

$$\begin{aligned}\alpha_c &= -\frac{2m'(m+M)}{(m+M)\,m + (3m+2M)\,m'}\frac{g}{R} \\ a_s &= \frac{mm'}{(m+M)\,m + (3m+2M)\,m'}g\end{aligned}$$

Domanda 6 Se il cilindro è bloccato le equazioni diventano

$$\begin{aligned}(M+m)a_s &= T \\ m'a_s &= m'g - T\end{aligned}$$

ed in questo caso

$$a_s = \frac{m'}{M+m+m'}g$$

Notare che

$$T = \left(\frac{M+m}{M+m+m'}\right)m'g < m'g$$

Soluzione esercizio 2

Domanda 1 Dato che le adiabatiche sono reversibili possiamo scrivere

$$\begin{aligned}P_2 V_A^\gamma &= P_1 V_D^\gamma \\ P_2 V_B^\gamma &= P_1 V_C^\gamma\end{aligned}$$

da cui

$$V_D = V_A \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/\gamma} = \frac{1}{\rho^{1/\gamma}} V_A$$
$$V_C = V_B \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/\gamma} = \frac{1}{\rho^{1/\gamma}} V_B$$

Considerando che la pendenza di una adiabatica è maggiore in valore assoluto di quella di una isoterma si vede che la temperatura massima si raggiunge in B, quella minima in D. Entrambe si possono calcolare utilizzando la legge dei gas perfetti:

$$T_D = \frac{P_1 V_D}{nR} = \frac{P_1 V_A}{nR} \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/\gamma}$$
$$T_B = \frac{P_2 V_B}{nR}$$

Domanda 2 Il calore viene assorbito dal sistema solo sulla isobara $A \to B$, e vale

$$Q_{ass} = nc_P \left(T_B - T_A\right)$$

Il lavoro totale è dato dalla somma di

$$L_{A\to B} = P_2 \left(V_B - V_A\right)$$
$$L_{B\to C} = -\Delta U_{B\to C} = nc_V \left(T_B - T_C\right)$$
$$L_{C\to D} = P_1 \left(V_D - V_C\right)$$
$$L_{D\to A} = -\Delta U_{D\to A} = nc_V \left(T_D - T_A\right)$$

Quindi

$$\eta = \frac{P_2 \left(V_B - V_A\right) + P_1 \left(V_D - V_C\right) + nc_V \left(T_B - T_C + T_D - T_A\right)}{nc_P \left(T_B - T_A\right)}$$
$$\eta = 1 - \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - \rho^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Domanda 3 In questo caso non è più possibile utilizzare l'equazione dell'adiabatica reversibile. Sappiamo però calcolare il lavoro fatto sul sistema durante $B \to C$ e $D \to A$, che sarà uguale e opposto al lavoro fatto dal gas e, per il primo principio, uguale alla variazione dell'energia interna. Quindi

$$P_1 \left(V_B - V_C\right) = nc_V \left(T_C - T_B\right)$$
$$P_2 \left(V_D - V_A\right) = nc_V \left(T_A - T_D\right)$$

Dalla legge dei gas perfetti troviamo

$$\begin{aligned}
P_1 (V_B - V_C) &= \frac{c_V}{R} (P_1 V_C - P_2 V_B) \\
P_2 (V_D - V_A) &= \frac{c_V}{R} (P_2 V_A - P_1 V_D)
\end{aligned}$$

e risolvendo

$$\begin{aligned}
V_C &= \frac{1}{\gamma} \left(\gamma + \frac{1}{\rho} - 1 \right) V_B \\
V_D &= \left(\frac{\gamma}{\gamma + \rho - 1} \right) V_A
\end{aligned}$$

Domanda 4 Il calore assorbito è lo stesso del caso reversibile. Per il lavori abbiamo invece

$$\begin{aligned}
L_{A\to B} &= P_2 (V_B - V_A) \\
L_{B\to C} &= P_1 (V_C - V_B) \\
L_{C\to D} &= P_1 (V_D - V_C) \\
L_{D\to A} &= P_2 (V_A - V_D)
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{(P_1 - P_2)(V_D - V_B)}{n c_P (T_B - T_A)} \\
&= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{(1-\rho)}{(V_B - V_A)} \left[V_B - \left(\frac{\gamma}{\gamma + \rho - 1} \right) V_A \right] \\
&= \frac{\gamma - 1}{\gamma} (1-\rho) \left(\frac{\gamma + 2\rho - 2}{\gamma + \rho - 1} \right)
\end{aligned}$$

Per avere rendimento positivo dovrà essere

$$\rho > 1 - \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{6}$$