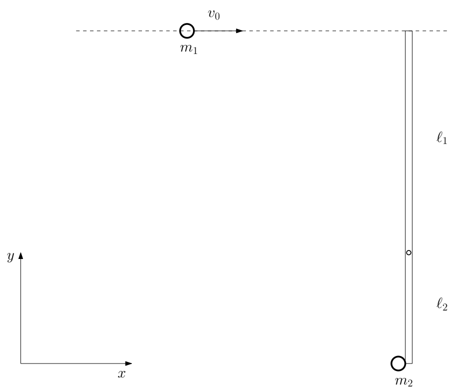
1.38. 3 maggio 2017

Esercizio 1



Un'asta è imperniata in un punto attorno al quale può ruotare liberamente rimanendo in un piano orizzontale. La massa dell'asta è trascurabile. Le lunghezze dei due tratti della sbarra, dai due lati del perno, sono rispettivamente ℓ_1 e ℓ_2. Nel sistema di riferimento in figura, la sbarra si trova inizialmente orientata lungo l'asse y.

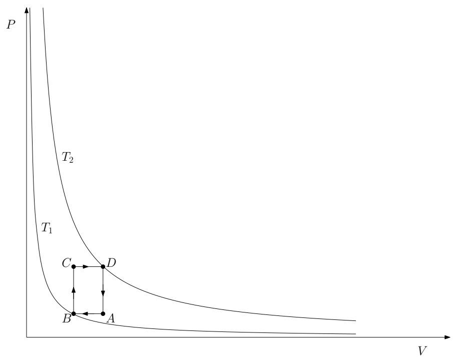
Una massa puntiforme m_2 si trova inizialmente a contatto con un estremo della sbarra, mentre una massa m_1 si muove verso l'altro con velocità $\vec{v} = v_0\hat{x}$. Studiare i casi che seguono.

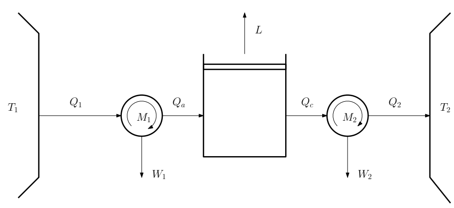
1. La massa m_2 è fissata alla sbarra e la massa m_1 rimane attaccata ad essa durante l'urto. Calcolare la velocità angolare finale del sistema.

2. La massa m_2 è libera. Supponendo che la massa m_1 urti elasticamente la osbarra calcolare le velocità finali delle due masse supponendo l'urto istantaneo.

3. Se la massa m_2 è libera e la massa m_1 rimane fissata alla sbarra dopo l'urto, quanta energia può essere dissipata al massimo in questo?

Esercizio 2





Una trasformazione ciclica quasistatica di n moli di un gas perfetto monoatomico è costituita da due trasformazioni isocore e due trasformazioni isobare, come in figura a sinistra. La temperatura massima e minima raggiunta durante il ciclo è rispettivamente T_2 e T_1.

1. Tra tutte le trasformazioni del tipo descritto, mostrare che per fissate T_1 e T_2 il lavoro è funzione del solo rapporto $x = V_B/V_D$. Determinare per quale valore di x il lavoro fatto dal gas è massimo. Calcolare il rendimento per tale valore di x, e dire se si tratta del rendimento massimo.

2. La trasformazione determinata viene realizzata ponendo alternativamente in contatto termico il recipiente contenente il gas con due bagni termici a temperatura T_1 e T_2, e mantenendo opportunamente costanti pressione e volume. Si ottiene una trasformazione quasistatica facendo fluire il calore in modo sufficientemente lento con una opportuna resistenza termica. In quali fasi si ha contatto termico con il bagno T_1 e in quali con il bagno T_2? Calcolare infine la variazione di entropia dell'universo in un ciclo.

3. Si realizza adesso la trasformazione sostituendo alle resistenze termiche delle macchine reversibili come in figura, a destra (al centro è rappresentato il contenitore con il gas perfetto). Il tratto $B \to C \to D$ viene realizzato attivando la macchina termica M_2, il tratto $D \to A \to B$ attivando la macchina termica M_1. Determinare il segno dei lavori W_1, W_2 e L prodotti dalle due macchine termiche e dal sistema in un ciclo di quest'ultimo. Determinare l'efficienza complessiva della trasformazione, definita come
$$\eta = \frac{L + W_1 + W_2}{Q_2}$$
giustificando il risultato.

Soluzione esercizio 1

Domanda 1 Durante l'urto si conserva il momento angolare del sistema rispetto al perno. Di conseguenza
$$-m_1 v_0 \ell_1 = (m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2)\omega$$
da cui
$$\omega = -\frac{m_1 v_0 \ell_1}{m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2}$$

Domanda 2 In questo caso si conserva il momento angolare rispetto al perno, l'energia e le quantità di moto lungo y delle due masse che rimangono nulle prima e dopo. Di conseguenza
$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$
$$-m_1 v_0 \ell_1 = -m_1 v_1 \ell_1 + m_2 v_2 \ell_2$$

Risolvendo otteniamo

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{m_1\ell_1^2 - m_2\ell_2^2}{m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2} v_0 \\
v_2 &= -\frac{2\ell_1\ell_2 m_1}{m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2} v_0
\end{aligned}
$$

Domanda 3 Il momento angolare del sistema rispetto al perno è ancora conservato. Quindi

$$
-m_1\ell_1 v_0 = m_1\ell_1^2\omega + m_2\ell_2 v_2
$$

$$
\frac{-m_1\ell_1 v_0 - m_2\ell_2 v_2}{m_1\ell_1^2} = \omega
$$

Sostituendo nell'energia finale

$$
\begin{aligned}
E_f &= \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_1\ell_1^2\omega^2 \\
&= \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_1\ell_1^2\left(\frac{m_1\ell_1 v_0 + m_2\ell_2 v_2}{m_1\ell_1^2}\right)^2
\end{aligned}
$$

Determiniamo il minimo derivando rispetto a v_2:

$$
v_2 = -v_0\frac{\ell_2}{\ell_1}\frac{m_1\ell_1^2}{m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2}
$$

Da notare che questo significa

$$
\omega = -\frac{m_1\ell_1^2}{m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2}\frac{v_0}{\ell_1}
$$

cioè

$$
v_2 = \ell_2\omega
$$

in altre parole la massa m_2 ha inizialmente la stessa velocità dell'estremità dell'asta con la quale è in contatto. Sostituendo troviamo

$$
E_{f,min} = \left(\frac{m_1\ell_1^2}{m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2}\right)\frac{1}{2}m_1 v_0^2
$$

e quindi la massima energia dissipata è

$$
E_{diss,max} = \left(\frac{m_2\ell_2^2}{m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2}\right)\frac{1}{2}m_1 v_0^2
$$

Soluzione esercizio 2

Domanda 1 Il lavoro fatto dal gas in un ciclo si scrive

$$\begin{aligned} L &= (P_D - P_B)(V_D - V_B) \\ &= P_D V_D + P_B V_B - P_D V_B - P_B V_D \\ &= nR(T_1 + T_2) - nRT_2 \frac{V_B}{V_D} - nRT_1 \frac{V_D}{V_B} \\ &= nR(T_1 + T_2) - nR\left(T_2 x + T_1 \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

ed a temperature estreme fissate è funzione del solo rapporto tra volume massimo e minimo. Il lavoro massimo si ottiene ponendo

$$\frac{dL}{dx} = -nR\left(T_2 - T_1 \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

cioè

$$x = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

e vale

$$L = nR(T_2 + T_1) - 2nR\sqrt{T_1 T_2}$$

Il calore assorbito vale invece

$$\begin{aligned} Q_{ass} &= nc_V (T_C - T_B) + nc_P (T_D - T_C) \\ &= nT_2 (1 - x)[xc_V + c_P] \end{aligned}$$

da cui l'efficienza

$$\eta = \frac{T_1\left(1 - \frac{1}{x}\right) + T_2(1 - x)}{\frac{c_P}{R} T_2 - \frac{c_V}{R} T_1 - T_2 x}$$

Derivando troviamo la condizione di efficienza massima

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{Q_{ass}} \frac{dL}{dx} - \frac{L}{Q_{ass}^2} \frac{dQ_{ass}}{dx} = 0$$

Dato che per il valore di x che rende massimo il lavoro $dL/dx = 0$, anche l'efficienza sarà massima se contemporameamente $dQ_{ass}/dx = 0$. Ma

$$\frac{dQ_{ass}}{dx} = -nRT_2$$

e quindi il ciclo di efficienza massima corrisponderà ad un valore di x maggiore.

Domanda 2 Il calore deve fluire spontaneamente, quindi si manterrà il recipiente in contatto col bagno termico a temperatura T_2 nel tratto $B \to C \to D$ e con il bagno termico a temperatura T_1 nel tratto $D \to A \to B$.

In un ciclo l'entropia del gas non cambia, quindi è sufficiente considerare le variazioni di entropia dei bagni termici. Per il secondo abbiamo

$$\Delta S_2 = -\frac{Q_{ass}}{T_2} = -n\,(1-x)\,[xc_V + c_P]$$

e per il secondo

$$\Delta S_1 = \frac{Q_{ced}}{T_1}$$

Il calore ceduto vale

$$\begin{aligned} Q_{ced} &= nc_P\,(T_2 - T_A) + nc_V\,(T_A - T_1) \\ &nT_1\left(\frac{1}{x}-1\right)\left[\frac{1}{x}c_P + c_V\right] \end{aligned}$$

da cui

$$\Delta S_1 = n\left(\frac{1}{x}-1\right)\left[\frac{1}{x}c_P + c_V\right]$$

In conclusione

$$\begin{aligned} \Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 &= n\frac{(1-x)(1-x^2)}{x^2}\,[c_P + xc_V] \\ &= nR\frac{(1-x)(1-x^2)\,(5+3x)}{2x^2} \end{aligned}$$

Domanda 3 Dato che sia in $B \to C \to D$ che nel tratto $D \to A \to B$ il calore fluirebbe spontaneamente abbiamo $W_1 > 0$ e $W_2 > 0$. Sappiamo già che $L > 0$. Infine, l'efficienza complessiva della unica macchina termica reversibile che lavora tra i due bagni termici deve essere equivalente all'efficienza di un cicli di Carnot, e quindi

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$