1.39. 1 giugno 2017

Problema 1

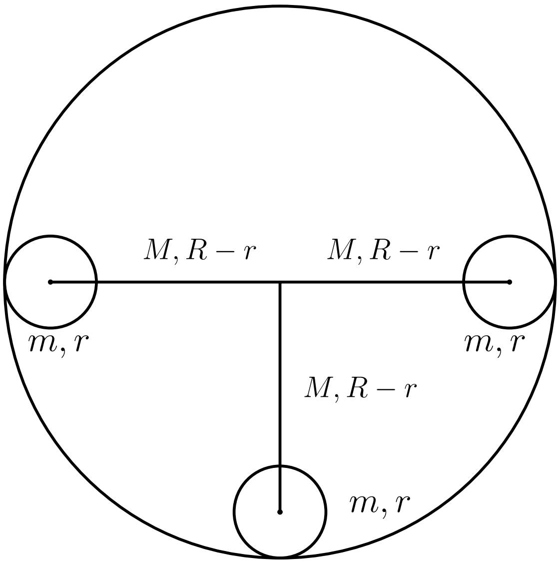

Figura 1.36.: La cavità cilindrica del problema con la struttura al suo interno. Le pareti della cavità sono fisse.

In una cavità cilindrica di raggio R è posta la struttura costruita come in figura, utilizzando tre aste rigide di massa M e lunghezza $R-r$ e tre cilindri di massa m e raggio r. Le tre aste sono saldate rigidamente e perpendicolarmente tra loro, mentre i cilindri possono ruotare liberamente attorno all'estremo dell'asta al quale sono fissati, mentre rotolano senza strisciare sulla superficie interna della cavità. L'asse della cavità cilindrica è orizzontale, ed è presente un campo gravitazionale costante $\vec{g}$.

1. Supponendo che inizialmente il sistema si trovi nella sua posizione di equilibrio stabile, come in figura, determinare la velocità angolare iniziale minima delle aste che permette alla struttura di fare un giro completo.

2. Detta ω la velocità angolare delle aste, calcolare la componente del momento angolare del sistema nella direzione parallela all'asse della cavità cilindrica, scegliendo il polo nel centro della cavità. Dire se si conserva in assenza di gravità, giustificando la risposta.

3. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

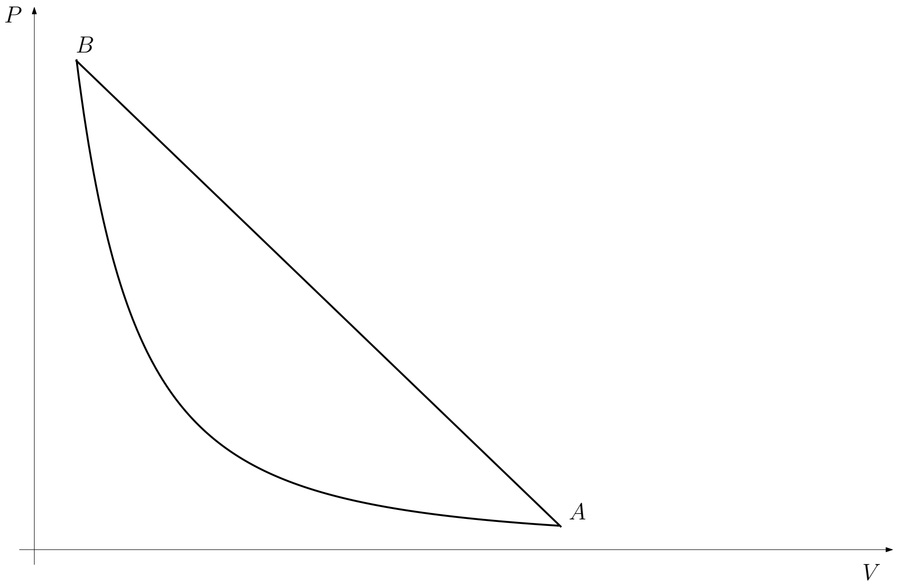

Figura 1.37.: La trasformazione termodinamica considerata nel problema.

Problema 2

Una mole di gas perfetto monoatomico subisce la trasformazione rappresentata in figura, formata da una adiabatica reversibile e dalla retta

$$\frac{P-P_A}{P_B-P_A}=\frac{V-V_A}{V_B-V_A}$$

che unisce lo stato A e lo stato B. Si conoscono la pressione P_B e il volume V_B nello stato B e il volume V_A nello stato A.

1. Determinare P_A. Nelle domande successive sarà sufficiente esprimere i risultati in funzione di P_A, P_B, V_A e V_B.

2. Determinare la temperatura massima T_{max} e minima T_{min} raggiunta dal gas e il lavoro L fatto dal gas in un ciclo, esprimendo queste quantità in funzione di P_A, P_B, V_A e V_B.

3. Determinare in quali fasi del ciclo il gas assorbe calore e in quali lo cede.

Soluzioni

Domanda 1.1

Possiamo utilizzare la conservazione dell'energia. Detta ω la velocità angolare delle aste, determiniamo quella dei cilindri. Usando la condizione di rotolamento puro vediamo che deve essere

$$\omega\left(R-r\right)=-\omega_c r$$

da cui

$$\omega_c = \frac{r-R}{r}\omega$$

L'energia cinetica si può scrivere nella forma

$$K = 3\left[\frac{1}{2}I_{asta}\omega^2 + \frac{1}{2}I_c\omega_c^2\right]$$

dove

$$I_{asta} = \frac{1}{3}M\left(R-r\right)^2$$

è il momento di inerzia di ciascuna asta rispetto ad un suo estremo e

$$I_c = \frac{3}{2}mr^2$$

il momento di inerzia di ciascun cilindro rispetto al punto di contatto.

Calcoliamo la distanza del centro di massa del sistema dal centro della cavità. Abbiamo

$$\begin{aligned} d_{CM} &= \frac{m\left(R-r\right) + M\frac{1}{2}\left(R-r\right)}{3m+3M} \\ &= \frac{m+\frac{1}{2}M}{3m+3M}\left(R-r\right) \end{aligned}$$

Detto θ l'angolo tra l'asta posta ortogonalmente alle altre due e la direzione verticale abbiamo

$$\begin{aligned} E &= \frac{3}{2}\left[I_{asta} + I_c\left(\frac{r-R}{r}\right)^2\right]\omega^2 - 3\left(m+M\right)gd_{cm}\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[M + \frac{9}{2}m\right]\left(R-r\right)^2\omega^2 - 3\left(m+M\right)gd_{cm}\cos\theta \end{aligned}$$

Usando la conservazione dell'energia abbiamo la condizione

$$\frac{3}{2}\left[I_{asta} + I_c\left(\frac{r-R}{r}\right)^2\right]\omega^2 - 3\left(m+M\right)gd_{cm} = 3\left(m+M\right)gd_{cm}$$

da cui

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{4\left(m+M\right)gd_{cm}}{I_{asta} + I_c\left(\frac{r-R}{r}\right)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{M+2m}{2M+9m}\frac{4g}{\left(R-r\right)}} \end{aligned}$$

Domanda 1.2

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned}L &= 3\left[I_{asta}\omega + \frac{1}{2}mr^2\omega_c + m\left(R-r\right)^2\omega\right]\\ &= 3\left[\left(\frac{1}{3}M+m\right)\left(R-r\right) - \frac{1}{2}mr\right]\left(R-r\right)\omega\end{aligned}$$

In assenza di gravità L si conserva: infatti le uniche forze che possono avere momento non nullo rispetto al polo sono le componenti tangenti $F_{T,i}$ alla superficie della cavità delle forze di contatto. Se consideriamo i cilindri, vediamo che il loro momento angolare relativo al centro di massa deve soddisfare

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\omega}_c = F_{T,i}r$$

e quindi tutte le $F_{T,i}$ hanno lo stesso valore. Infine

$$\frac{dL}{dt} = 3\left[\left(\frac{1}{3}M+m\right)\left(R-r\right) - \frac{1}{2}mr\right]\left(R-r\right)\dot{\omega} = 3F_{T,i}R$$

di conseguenza

$$\left[\left(\frac{1}{3}M+m\right)\left(R-r\right) - \frac{1}{2}mr\right]\frac{R-r}{R}\dot{\omega} = \frac{1}{2}mr\dot{\omega}_c$$

ossia

$$\left(\frac{1}{3}M+\frac{3}{2}m\right)\left(1-\frac{r}{R}\right)\dot{\omega} = 0$$

ma questo è possibile solo se $\dot{\omega} = 0$.

Più semplicemente si può notare che dalla conservazione dell'energia in assenza di gravità segue $\dot{\omega} = \dot{\omega}_c = 0$. Segue che nessun momento può essere applicato ai cilindri, relativamente al centro di massa, e quindi le componenti delle reazioni vincolari parallele alla superficie della cavità devono essere nulle.

Domanda 1.3

Per piccole oscillazioni l'energia vale, a meno di una costante,

$$\begin{aligned}E &= \frac{3}{2}\left[I_{asta} + I_c\left(\frac{r-R}{r}\right)^2\right]\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}\left(m+M\right)gd_{cm}\theta^2\\ &= \frac{3}{2}\left[\frac{M}{3}+\frac{3}{2}m\right]\left(R-r\right)^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}\left(m+M\right)gd_{cm}\theta^2\end{aligned}$$

di conseguenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(m+M)\,gd_{cm}}{I_{asta}+I_c\left(\frac{r-R}{r}\right)^2}}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{M+2m}{2M+9m}\frac{g}{(R-r)}}$$

Domanda 2.1

Dato che A e B appartengono alla stessa adiabatica avremo

$$P_A = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma} P_B$$

Domanda 2.2

Dato che su una adiabatica

$$T = \frac{K}{V^{\gamma-1}}$$

con $\gamma > 1$ e $K > 0$ la temperatura minore sarà sul punto a maggiore volume dell'adiabatica del ciclo considerato, cioà in A. Di conseguenza

$$T_{min} = \frac{1}{R}P_A V_A$$

La temperatura massima sarà sul punto della retta BA tangente ad una isoterma. Partiamo dall'equazione della retta

$$P = P_B + \frac{P_A - P_B}{V_A - V_B}(V - V_B)$$

abbiamo

$$RT = PV$$
$$= P_B V + \frac{P_A - P_B}{V_A - V_B}(V - V_B)\,V$$

La temperatura massima si ottiene quando

$$V = \frac{1}{2}\frac{P_A V_B - P_B V_A}{P_B - P_A}$$

e vale

$$T_{max} = \frac{1}{4R}\frac{(P_B V_A - P_A V_B)^2}{(P_B - P_A)(V_A - V_B)}$$

Calcoliamo il lavoro

$$L_{B\to A} = \int_{V_B}^{V_A} P dV$$
$$= \frac{1}{2}\left(P_A + P_B\right)\left(V_A - V_B\right)$$

Sulla adiabatica

$$L_{A\to B} = U_A - U_B = c_V\left(T_A - T_B\right)$$

In conclusione

$$W = \frac{c_V}{R}\left(P_A V_A - P_B V_B\right) + \frac{1}{2}\left(P_A + P_B\right)\left(V_A - V_B\right)$$

Domanda 2.3

Sull'adiabatica non avviene alcuno scambio di calore. Dal primo principio abbiamo

$$\delta Q = c_V dT + P dV$$

e quindi il gas assorbirà calore quando

$$c_V \frac{dT}{dV} + P > 0$$

D'altra parte

$$PV = P_B V + \frac{P_A - P_B}{V_A - V_B}\left(V - V_B\right) V = RT$$

e quindi

$$R\frac{dT}{dV} = P_B + \frac{P_A - P_B}{V_A - V_B}\left(2V - V_B\right)$$

In conclusione dovrà essere

$$\frac{c_V}{R}\left[P_B + \frac{P_A - P_B}{V_A - V_B}\left(2V - V_B\right)\right] + P_B + \frac{P_A - P_B}{V_A - V_B}\left(V - V_B\right) > 0$$

cioè

$$V < \frac{\gamma}{\gamma + 1}\frac{P_B V_A - P_A V_B}{P_B - P_A}$$