1.40. 27 giugno 2017

Problema 1

Una piattaforma di massa $M = 5m$ è appoggiata su un piano orizzontale privo di attrito. Sulla piattaforma è posto un cilindro di massa m e raggio r, che rotola senza strisciare su di essa. Attorno al cilindro è avvolto un filo che viene mantenuto orizzontale e ad una tensione costante T riavvolgendolo con un apposito dispositivo A, come in Figura 1.38.

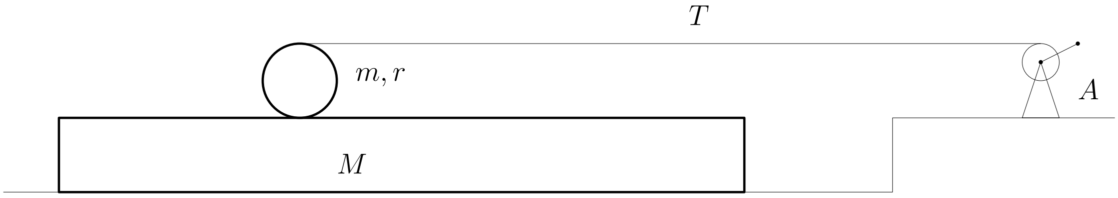

Figura 1.38.: La piattaforma appoggiata e il cilindro considerati nel problema.

1. Calcolare l'energia cinetica del sistema quando il filo è stato riavvolto per una lunghezza ℓ.
2. Calcolare la velocità v_c e la velocità angolare ω_c del cilindro quando quest'ultimo si è spostato di un tratto d relativamente al sistema inerziale fisso rispetto al piano.
3. Quando la velocità del cilindro raggiunge il valore determinato precedentemente il filo si spezza. Successivamente la pedana urta elasticamente contro un ostacolo. Determinare la velocità v_c' e la velocità angolare ω_c' del cilindro dopo l'urto.

Problema 2

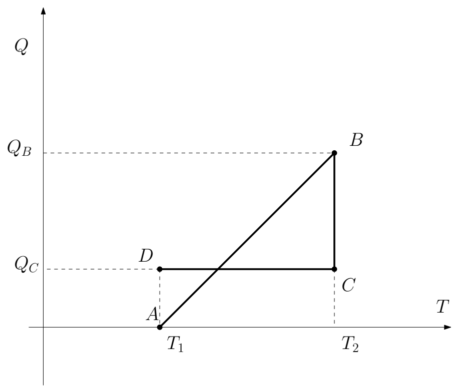

Figura 1.39.: La trasformazione del sistema rappresentato nel piano $Q - T$.

Una mole di un gas perfetto monoatomico subisce una trasformazione reversibile rappresentata nel grafico in Figura 1.39. Sull'asse orizzontale è riportata la temperatura, su quello verticale il calore trasferito al gas. Si conosce la temperatura T_1 del gas negli stati che corrispondono ad A e D e la temperatura T_2 negli stati che corrispondono a B e C.

1. Determinare Q_B in modo che la trasformazione $A \to B$ sia una isobara, e Q_C in modo che la trasformazione complessiva $A \to B \to C \to D$ sia ciclica.
2. Con i dati a disposizione e assumendo i valori Q_B e Q_C calcolati precedentemente calcolare il rendimento del ciclo e la variazione di entropia $\Delta S_{A\to D}$ del gas da A a D.
3. Assumendo per Q_B il valore determinato precedentemente e $Q_C = 0$ calcolare il lavoro compiuto dal gas e la sua variazione di entropia $\Delta S_{A\to D}$.

Soluzione

Problema 1

1. La forza dovuta alla tensione del filo è applicata ad un punto del cilindro che si muove, per il puro rotolamento, con la stessa velocità del filo stesso. Di conseguenza per il teorema delle forze vive l'energia cinetica del sistema è data da

$$K = T\ell$$

2. La prima equazione cardinale per il cilindro da

$$ma_c = T - F_a$$

dove F_a è l'attrito statico tra cilindro e piattaforma. La seconda equazione cardinale, prendendo il polo nel centro di massa del cilindro da

$$\frac{1}{2}mr^2\alpha_c = -Tr - F_a r$$

e la prima equazione cardinale per la piattaforma da

$$Ma = F_a$$

Infine la condizione di puro rotolamento fornisce la relazione

$$a_c = a - \alpha_c r$$

Ricavando a e F_a dalle ultime due relazioni

$$\begin{aligned} a &= a_c + \alpha_c r \\ F_a &= Ma_c + M\alpha_c r \end{aligned}$$

e sostituendo nelle prime due otteniamo

$$\begin{aligned}(m+M)\,a_c + Mr\alpha_c &= T\\ Ma_c + \left(\frac{1}{2}m + M\right) r\alpha_c &= -T\end{aligned}$$

e risolvendo

$$\begin{aligned}a_c &= \frac{(m+4M)}{m(m+3M)}T\\ \alpha_c &= -\frac{2(m+2M)}{m(m+3M)r}T\end{aligned}$$

Il cilindro si sposta di un tratto d al tempo

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a_c}}$$

e in quell'istante avremo

$$\begin{aligned}v_c = \sqrt{2da_c} &= \sqrt{\frac{2d(m+4M)}{m(m+3M)}T}\\ &= \sqrt{\frac{21}{8}\frac{dT}{m}}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\omega_c = \alpha_c t &= -\sqrt{\frac{8d(m+2M)^2}{m(m+3M)(m+4M)r^2}T}\\ &= -\frac{1}{r}\sqrt{\frac{121}{42}\frac{dT}{m}}\end{aligned}$$

Notare che la forza di attrito applicata alla piattaforma è negativa,

$$F_a = -\frac{2M}{(m+3M)}T$$

e quindi questa ha una accelerazione negativa

$$a = \frac{F_a}{M} = -\frac{2}{(m+3M)}T$$

3. Dopo che il filo si è spezzato si conserva l'energia cinetica e il momento angolare del cilindro rispetto al punto di contatto. Imponendo l'uguaglianza di queste due

quantità prima e dopo l'urto abbiamo

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega_c^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 + \frac{1}{2}mv_c'^2 + \frac{1}{2}I\omega_c'^2$$
$$-mrv_c + I\omega_c = -mrv_c' + I\omega_c'$$

Usando le condizioni di rotolamento puro

$$v_c = v - \omega_c r$$
$$v_c' = v' - \omega_c' r$$

possiamo eliminare le velocità della pedana ottenendo il sistema

$$M\left(v_c + \omega_c r\right)^2 + mv_c^2 + I\omega_c^2 = M\left(v_c' + \omega_c' r\right)^2 + mv_c'^2 + I\omega_c'^2$$
$$-mrv_c + I\omega_c = -mrv_c' + I\omega_c'$$

Risolvendo troviamo

$$\omega_c' = -\frac{4v_c + r\omega_c}{3r}$$
$$v_c' = \frac{1}{3}\left(v_c - 2r\omega_c\right)$$

Problema 2

1. Se la trasformazione $A \to B$ è una isobara deve essere $Q = c_p\left(T - T_1\right)$ di conseguenza

$$Q_B = c_p\left(T_2 - T_1\right)$$

Se la trasformazione $A \to B \to C \to D$ è ciclica A e D devono corrispondere allo stesso stato termodinamico. Sappiamo già che hanno la stessa temperatura: possiamo imporre che anche la pressione sia la stessa. Da A a B la pressione rimane costante, mentre sull'isoterma

$$Q_C - Q_B = L_{B\to C} = RT_2 \log\frac{V_C}{V_B}$$
$$= RT_2 \log\frac{P_A}{P_C}$$

da cui

$$P_C = P_A e^{-\frac{1}{RT_2}\left(Q_C - Q_B\right)}$$

Infine sull'adiabatica $PT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ è costante e quindi deve essere

$$P_D T_1^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_C T_2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = T_2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} P_A e^{-\frac{1}{RT_2}\left(Q_C - Q_B\right)}$$

Imponendo $P_D = P_A$ otteniamo

$$\begin{aligned} Q_C &= Q_B - \frac{\gamma}{\gamma - 1} R T_2 \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \\ &= c_p \left(T_2 - T_1\right) - \frac{\gamma}{\gamma - 1} R T_2 \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \end{aligned}$$

2. Dato che la trasformazione è ciclica la variazione di entropia è nulla. Per quanto riguarda il rendimento abbiamo che nella trasformazione viene assorbito un calore Q_B e ceduto un calore $Q_B - Q_C$, quindi

$$\eta = 1 - \frac{Q_B - Q_C}{Q_B} = \frac{Q_C}{Q_B}$$

cioè

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_2 - T_1} \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

3. Il lavoro compiuto dal gas è la differenza tra calore assorbito e calore ceduto, cioè Q_C. Di conseguenza in questo caso è nullo. Per quanto riguarda l'entropia, abbiamo

$$\begin{aligned} \Delta S_{A\to D} = \Delta S_{A\to C} &= c_p \log \frac{T_2}{T_1} - \frac{Q_B}{T_2} \\ &= c_p \left(\log \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_1}{T_2} - 1 \right) \end{aligned}$$