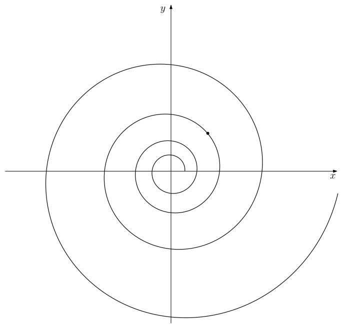
1.41. 4 settembre 2017

Problema 1



Una guida a forma di spirale è descritta nel piano, in un opportuno sistema di riferimento inerziale e in coordinate polari, dalla relazione

$$r = r_0 e^{\beta\theta}$$

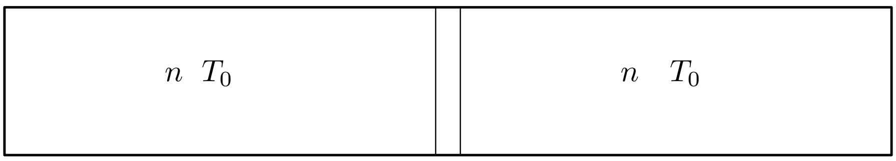
dove r_0 e β sono due parametri positivi e $-\infty < \theta < \infty$. Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi sulla guida, e gli attriti presenti sono trascurabili. Nel seguito si indicheranno con θ_p e r_p le coordinate polari che specificano la posizione di tale punto.

1. All'istante iniziale si ha $\theta_p(0) = 0$ e $\dot{\theta}_p(0) = \omega_0$. Determinare il modulo della velocità della pallina $v_p(t)$.

2. Supponiamo che il sistema di riferimento non sia inerziale, ma ruoti con velocità costante Ω attorno all'origine. Se inizialmente $\theta_p(0) = 0$ e $\dot{\theta}_p(0) = 0$ calcolare $v_p(t)$. La forza di Coriolis influisce sul moto del punto?

3. Calcolare la potenza $W(t)$ del motore che mantiene la guida in rotazione costante, con le condizioni iniziali per il punto materiale specificate precedentemente.

Problema 2



Un tubo cilindrico di sezione S e lunghezza L, chiuso agli estremi, è diviso in due parti inizialmente dello stesso volume, come in figura, mediante una massa m. Anche la masse è cilindrica, con la stessa sezione del tubo e altezza trascurabile. In ciascuna delle due parti sono contenute n moli di un gas perfetto monoatomico, inizialmente alla stessa temperatura T_0. La massa permette scambi di calore, e si può modellare come una resistenza termica R_T.

1. Si sposta molto lentamente agendo dall'esterno la massa, fino a quando il volume del secondo scomparto non si dimezza. Calcolare la nuova temperatura del gas.

2. Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni della massa attorno alla posizione di equilibrio iniziale, supponendo che il moto sia abbastanza lento da poter definire istante per istante pressione e temperatura dei gas nei due scomparti. Si supponga inoltre che $R_T \to \infty$, in modo da poter considerare la massa isolante.

3. Cosa cambia nel problema precedente se $R_T = 0$? Si continui a considerare i parametri termodinamici del sistema ben definiti.

Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Dato che la particella è vincolata alla guida deve essere istante per istante

$$r_p = r_0 e^{\beta\theta_p}$$

e derivando

$$\dot{r}_p = \beta\dot{\theta}_p r_0 e^{\beta\theta_p} = \beta\dot{\theta}_p r_p$$

Quindi

$$\begin{aligned} v_p &= \sqrt{\dot{r}_p^2 + r_p^2\dot{\theta}_p^2} \\ &= |\dot{r}_p| \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2}} \end{aligned}$$

Possiamo esprimere v_p anche in funzione della velocità angolare

$$v_p = r_p \left|\dot{\theta}_p\right| \sqrt{1+\beta^2}$$

In particolare usando quest'ultima otteniamo

$$v_p(0) = r_0\omega_0\sqrt{1+\beta^2}$$

Ma dato che non si hanno attriti l'energia cinetica (e quindi il modulo della velocità) si conservano, quindi

$$\boxed{v_p(t) = r_0\omega_0\sqrt{1+\beta^2}}$$

Domanda 2

Osserviamo che la forza di Coriolis è proporzionale al prodotto vettore tra velocità angolare (ortogonale al piano) e velocità (parallela alla guida). Quindi è perpendicolare al vincolo e non ha effetti sul moto.

Aggiungendo un potenziale centrifugo possiamo scrivere l'energia totale conservata nella forma

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}mv_p^2 - m\Omega^2 r_p^2 \\ &= \frac{1}{2}m\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\dot{r}_p^2 - \frac{1}{2}m\Omega^2 r_p^2\end{aligned}$$

Derivando rispetto al tempo troviamo l'equazione del moto

$$\ddot{r}_p - \frac{\Omega^2\beta^2}{1+\beta^2}r_p = 0$$

che ha per soluzione

$$r_p = Ae^{\frac{\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t} + Be^{-\frac{\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t}$$

Dalle condizioni al contorno segue che

$$\begin{aligned}r_p(t) &= r_0 \cosh \frac{\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t \\ \dot{r}_p(t) &= \frac{\Omega\beta r_0}{\sqrt{1+\beta^2}} \sinh \frac{\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t\end{aligned}$$

e quindi

$$v_p(t) = |\dot{r}_p| \sqrt{1+\frac{1}{\beta^2}} = \left|\Omega r_0 \sinh \frac{\Omega\beta t}{\sqrt{1+\beta^2}}\right|$$

Domanda 3

Rispondiamo lavorando nel sistema di riferimento inerziale. La potenza è uguale alla derivata dell'energia cinetica della particella. Questa si scrive nel sistema scelto

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}_{pi}^2 + r_{pi}^2\dot{\theta}_{pi}^2\right)$$

e in termini delle variabili nel sistema rotante

$$E = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}_p^2 + r_p^2\left(\dot{\theta}_p + \Omega\right)^2\right]$$

Abbiamo già calcolato $\dot{r}_p$ e r_p e sappiamo che $\dot{\theta}_p = \frac{1}{\beta r_p}\dot{r}_p$, quindi

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m\left[\dot{r}_p^2 + \left(\frac{1}{\beta}\dot{r}_p + r_p\Omega\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{1+\beta^2}{\beta^2}\right)\dot{r}_p^2 + \frac{2}{\beta}\dot{r}_p r_p \Omega + r_p^2\Omega^2\right] \\
&= \frac{1}{2}m\Omega^2 r_0^2\left[\sinh^2\frac{\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t + \cosh^2\frac{\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t + 2\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}\sinh\frac{\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t\cosh\frac{\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t\right] \\
&= \frac{1}{2}m\Omega^2 r_0^2\left[\cosh\frac{2\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t + \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}\sinh\frac{2\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t\right]
\end{aligned}$$

Derivando rispetto al tempo otteniamo la potenza

$$W = mr_0^2\frac{\Omega^3\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\left[\sinh\frac{2\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t + \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}\cosh\frac{2\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t\right]$$

Per $\beta = 0$ la spirale si riduce a una circonferenza e $W = 0$.

Problema 2

Domanda 1

Dato che sono possibili scambi di calore il gas nei due scomparti ha la stessa temperatura. Possiamo scrivere per essi

$$\begin{aligned}
dQ &= nc_V dT + P_1 dV_1 \\
-dQ &= nc_V dT + P_2 dV_2
\end{aligned}$$

Sommando membro a membro

$$0 = 2nc_V dT + P_1 dV_1 + P_2 dV_2$$

e usando le equazioni di stato

$$0 = \frac{dT}{T} + \frac{R}{2c_V}\left(\frac{dV_1}{V_1} + \frac{dV_2}{V_2}\right)$$

Integrando otteniamo

$$0 = \log\frac{T}{T_0} + \frac{R}{2c_V}\left(\log\frac{3}{2} + \log\frac{1}{2}\right)dV_1$$

$$0 = \log\frac{T}{T_0} + \frac{\gamma-1}{2}\log\frac{3}{4}$$

e quindi

$$T = T_0 \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}(\gamma-1)}$$

Per risolvere il problema si poteva anche osservare che l'entropia totale non doveva cambiare, dato che la trasformazione è reversibile e i gas non scambiano calore. Quindi

$$\Delta S = 2nc_V \log\frac{T}{T_0} + nR\log\frac{\frac{3}{2}V_0}{V_0} + nR\log\frac{\frac{1}{2}V_0}{V_0} = 0$$

da cui segue lo stesso risultato.

Domanda 2

Possiamo scrivere l'equazione del moto nella forma

$$m\ddot{x} = S\left(P_1 - P_2\right)$$

dove x è lo spostamento del setto dalla posizione di equilibrio iniziale. Non si ha trasferimento di calore tra i due scomparti, quindi i gas subiscono una trasformazione adiabatica. Quindi

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^\gamma \\ P_2 &= P_0\left(\frac{V_0}{V_2}\right)^\gamma \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= SP_0\left[\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^\gamma - \left(\frac{V_0}{V_2}\right)^\gamma\right] \\ &= SP_0\left[\left(\frac{V_0}{V_0+Sx}\right)^\gamma - \left(\frac{V_0}{V_0-Sx}\right)^\gamma\right] \end{aligned}$$

Per piccole oscillazioni

$$\ddot{x} = -\frac{2\gamma S^2 P_0}{mV_0}x$$

e quindi

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2\gamma S^2 P_0}{mV_0}} = \sqrt{\gamma}\sqrt{\frac{8nRT_0}{mL^2}}$$

Domanda 3

In questo caso le temperature dei due gas sono istante per istante identiche. L'equazione del moto precedente si può scrivere nella forma

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= S\left(P_1 - P_2\right) \\ &= nRTS\left(\frac{1}{V_0 + Sx} - \frac{1}{V_0 - Sx}\right) \end{aligned}$$

ma per piccole oscillazioni il contributo tra parentesi è del primo ordine, e quindi si può porre $T = T_0$. Segue che

$$\ddot{x} = -\frac{2nRS^2T_0}{mV_0^2}x$$

e quindi

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2nRS^2T_0}{mV_0^2}} = \sqrt{\frac{8nRT_0}{mL^2}}$$

Notare che $\omega_1 = \sqrt{\gamma}\omega_2$.