1.43. 15 gennaio 2018

Esercizio 1

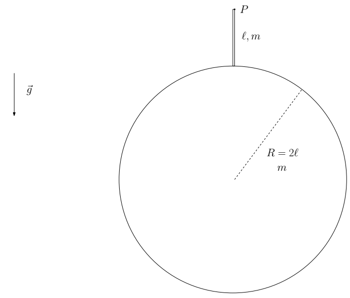

Figura 1.42.: Il pendolo fisico descritto nel problema.

Un pendolo fisico e costituito da una sbarra sottile di lunghezza ℓ e massa m, saldata ad un estremo ad un disco di uguale massa e raggio $R = 2\ell$, ed appeso all'estremo opposto.

1. Calcolare la distanza tra il punto di sospensione ed il centro di massa del pendolo.
2. Calcolare il momento di inerzia del pendolo rispetto ad un asse perpendicolare al piano di oscillazione e passante per il punto di sospensione.
3. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni ω_P rispetto alla posizione di equilibrio stabile.
4. Si fa oscillare orizzontalmente il punto di sospensione P secondo la legge

   $$x_P(t) = a \cos \Omega t$$

   Scrivere l'equazione del moto per l'inclinazione del pendolo e risolverla cercando una soluzione con lo stesso andamento temporale di $x_P(t)$.
5. Determinare Ω in modo che a regime il centro del disco rimanga fermo, supponendo che l'approssimazione di piccole oscillazioni resti valida.

Soluzione

Domanda 1

Combinando i contributi del disco e della sbarra abbiamo

$$d = \frac{m\frac{\ell}{2} + m(\ell + R)}{2m} = \frac{7}{4}\ell$$

Domanda 2

Sommando i contributi di disco e sbarra, e utilizzando il teorema di Steiner, abbiamo

$$\begin{aligned} I &= m\frac{\ell^2}{3} + \left[\frac{1}{2}m\,(2\ell)^2 + m\,(\ell+R)^2\right] \\ &= \frac{34}{3}m\ell^2 \end{aligned}$$

Domanda 3

La seconda equazione cardinale si scrive

$$I\ddot{\theta} + 2mgd\theta = 0$$

da cui

$$\omega_P = 2\pi f = \sqrt{\frac{2mgd}{I}} = \sqrt{\frac{21}{68}\frac{g}{\ell}}$$

Domanda 4

Nel sistema di riferimento solidale al punto di sospensione la seconda equazione cardinale si scrive adesso, per piccole oscillazioni,

$$I\ddot{\theta} + 2mgd\theta = -2md\ddot{x}_P$$

Cerchiamo una soluzione della forma

$$\theta = \theta_0 \cos \Omega t$$

Sostituendo abbiamo

$$-\Omega^2 I\theta_0 + 2mgd\theta_0 = 2mad\Omega^2$$

da cui

$$\theta_0 = \frac{2mad\Omega^2}{2mgd - I\Omega^2} = \frac{\omega_P^2}{\omega_P^2 - \Omega^2}\frac{a\Omega^2}{g}$$

Domanda 5

Nel sistema di laboratorio il centro del disco si muove orizzontalmente come

$$x_O = x_P + (\ell + R)\,\theta$$

ossia

$$x_O = a\cos\Omega t + (\ell+R)\,\theta_0 \cos\Omega t$$

e quindi è fermo quando

$$a + (\ell + R)\,\theta_0 = 0$$

Sostituendo troviamo la condizione

$$\Omega^2 = \frac{2mgd}{I - (\ell + R)\,2md} = \frac{9}{7}\frac{g}{\ell}$$

Esercizio 2

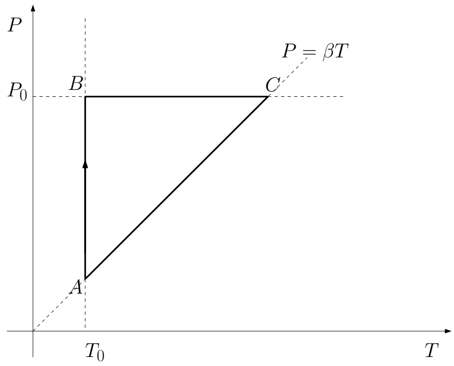

Figura 1.43.: Il ciclo termodinamico descritto nel problema.

Si sottopongono n moli di un gas perfetto monoatomico alla trasformazione termodinamica ciclica e quasistatica rappresentata in figura nel piano PT. Il tratto $A \to B$ avviene ad una temperatura costante T_0, il tratto $B \to C$ ad una pressione costante P_0 e sul tratto $C \to A$ vale $P = \beta T$ dove β è una costante nota di opportune dimensioni.

1. Rappresentare la trasformazione nel piano PV.
2. Determinare la temperatura massima T_{max} e minima T_{min} raggiunta dal gas.
3. Supponendo che il sistema possa scambiare calore solo con due bagni termici esterni alle temperature T_{min} e T_{max} calcolate precedentemente, determinare la variazione di entropia del gas in un ciclo.
4. Nelle stesse condizioni precedenti, calcolare la minima variazione di entropia dei bagni termici in un ciclo.

Soluzione

Domanda 1

La trasformazione $C \to A$ è isocora, infatti

$$P = \frac{nRT}{V} = \beta T$$

da cui

$$V = \frac{nR}{\beta}$$

La rappresentazione nel piano PV è riportata in Figura1.44.

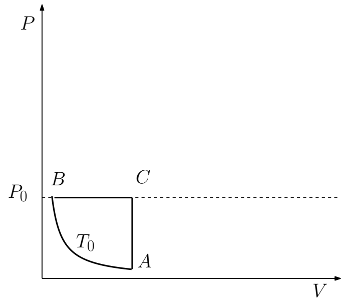

Figura 1.44.: Il ciclo nel piano $P-V$.

Domanda 2

La temperatura aumenta sulla isobara all'aumentare del volume, e sulla isocora all'aumentare della pressione. Quindi $T_{min} = T_0$ e

$$T_{max} = T_C = \frac{P_0}{\beta}$$

Domanda 3

Dato che l'entropia è una funzione di stato, dopo un ciclo non è cambiata per il gas, dato che questo torna nello stesso stato iniziale.

Domanda 4

Nella trasformazione $A \to B$ il bagno termico a T_{min} scambia con il gas il calore

$$Q_{A\to B} = nRT_{min} \log \frac{V_A}{V_B}$$

ed aumenta la propria entropia di

$$\Delta S_1 = \frac{Q_{A\to B}}{T_{min}} = nR \log \frac{P_0}{\beta T_0}$$

Nella trasformazione $B \to C$ il bagno termico a T_{max} scambia con il gas il calore

$$Q_{B\to C} = nc_P \left(T_{min} - T_{max}\right)$$

e riduce la sua entropia di

$$\Delta S_2 = \frac{Q_{B\to C}}{T_{max}} = nc_P \frac{T_{min} - T_{max}}{T_{max}}$$

Nella trasformazione $C \to A$ infine il bagno termico a T_{min} scambia con il gas il calore

$$Q_{C\to A} = nc_V \left(T_{max} - T_{min}\right)$$

e aumenta la sua entropia di

$$\Delta S_3 = \frac{Q_{C\to A}}{T_{min}} = nc_V \frac{T_{max} - T_{min}}{T_{min}}$$

La somma di queste variazioni è anche la variazione totale di entropia dell'universo:[1]0

$$\begin{aligned}
\Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 \\
&= nR \log \frac{P_0}{\beta T_0} + nc_P \left(\frac{T_{min}}{T_{max}} - 1\right) + nc_V \left(\frac{T_{max}}{T_{min}} - 1\right) \\
&= nR \log \frac{P_0}{\beta T_0} + nc_P \left(\frac{\beta T_0}{P_0} - 1\right) + nc_V \left(\frac{P_0}{\beta T_0} - 1\right)
\end{aligned}$$

[1]Questa è sempre positiva. Ponendo $x = \frac{P_0}{\beta T_0}$ abbiamo

$$\Delta S = nR \log x + nc_P \left(\frac{1}{x} - 1\right) + nc_V \left(x - 1\right)$$

Per $x = 1$ abbiamo $\Delta S = 0$. Ma

$$\frac{d}{dx}\Delta S = n\frac{\left(c_P + xc_V\right)\left(x - 1\right)}{x^2}$$

quindi $\Delta S(x)$ è crescente per $x > 1$ e decrescente per $x < 1$. Quindi $\Delta S \geq 0$.