1.44. 5 febbraio 2018

Esercizio 1

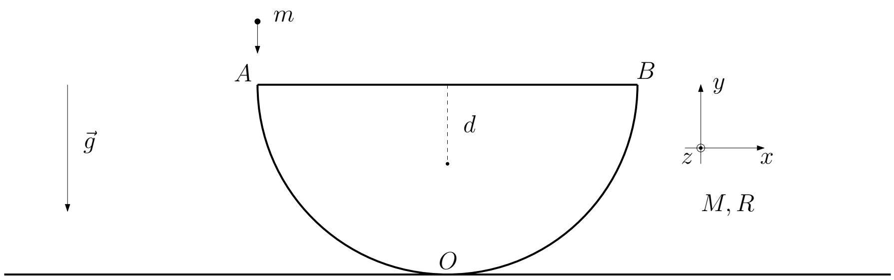

Figura 1.45.: Il sistema considerato nel problema.

La metà di un cilindro di massa M e raggio R è appoggiato su un piano orizzontale nella posizione di equilibrio stabile rappresentata in Figura 1.45. Una particella di massa m viene lasciata cadere verticalmente in modo da urtare lo spigolo del semicilindro con una velocità di modulo v_0. L'urto è completamente anelastico e istantaneo, e il semicilindro ruota senza strisciare sul piano. Il cilindro è omogeneo, quindi il suo centro di massa si trova ad una distanza $d = \frac{4R}{3\pi}$ dall'asse.

1. Calcolare il momento di inerzia I_O del mezzo cilindro rispetto ad un asse passante per il punto O di contatto col piano e parallelo all'asse z del sistema di riferimento riportato in figura.
2. Calcolare il momento angolare del sistema rispetto ad un polo opportunamente scelto immediatamente prima e immediatamente dopo l'urto.
3. Calcolare l'energia dissipata durante l'urto.
4. Per quale valore minimo di v_0 il punto di impatto A riesce ad arrivare a terra?

Soluzione

Domanda 1

Detto I_{CM} il momento di inerzia del semicilindro rispetto al suo centro di massa, dal teorema di Steiner abbiamo

$$\frac{1}{2}MR^2 = I_{CM} + Md^2$$
$$I_O = I_{CM} + M\left(R-d\right)^2$$

da cui

$$\begin{aligned} I_O &= \frac{1}{2}MR^2 + M\left(R-d\right)^2 - Md^2 \\ &= \frac{3}{2}MR^2 - 2MRd \\ &= \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right)MR^2 \end{aligned}$$

Domanda 2

Se poniamo il polo in O, durante l'urto il momento angolare si conserva perché le uniche forze impulsive esterne sono le reazioni del piano orizzontale, che hanno braccio nullo. Quindi sia prima che dopo l'urto

$$\vec{L} = mv_0R\hat{z}$$

$$mv_0R = \left(2mR^2 + I_O\right)\omega$$

da cui

$$\omega = \frac{mv_0R}{2mR^2 + I_O}$$

Domanda 3

Dopo l'urto il momento angolare si può scrivere nella forma

$$\vec{L} = \left(2mR^2 + I_O\right)\omega\hat{z}$$

Otteniamo quindi l'equazione

$$mv_0R = \left(2mR^2 + I_O\right)\omega$$

che permette di calcolare la velocità angolare del sistema dopo l'urto

$$\omega = \frac{mv_0R}{2mR^2 + I_O}$$

L'energia prima dell'urto vale

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2$$

e dopo

$$\begin{aligned} E_f &= \left(mR^2 + \frac{1}{2}I_O\right)\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{m^2R^2}{2mR^2 + I_O}v_0^2 \end{aligned}$$

L'energia dissipata è dunque

$$E_i - E_f = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(\frac{mR^2 + I_O}{2mR^2 + I_O} \right)$$

Domanda 4

Dopo l'urto vale la conservazione dell'energia meccanica, dunque

$$\frac{1}{2} \frac{m^2 R^2}{2mR^2 + I_O} v_0^2 - Mdg \geq U_{max}$$

Nell'equazione precedente U_{max} è il massimo dell'energia potenziale tra $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$, dove θ è l'inclinazione della faccia superiore del semicilindro. Dato che

$$U(\theta) = -Mgd \cos\theta - mgR \sin\theta$$

vediamo che si ha solo un minimo nell'intervallo considerato. Possiamo quindi considerare il valore del potenziale a $\theta = \pi/2$. Se

$$U(\pi/2) = -mgR \leq -Mdg$$

il punto A tocca terra indipendentemente da v_0. Questo è quanto accade se

$$m \geq \frac{4}{3\pi} M$$

.

In caso contrario deve essere

$$\frac{1}{2} \frac{m^2 R^2}{2mR^2 + I_O} v_0^2 \geq Mdg - mgR$$

cioè

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2gR \left(\frac{4}{3\pi} \frac{M}{m} - 1 \right) \left(2 + \frac{I_O}{mR^2} \right)}{mR^2}}$$

Esercizio 2

Due corpi di capacità termica $C = \alpha T$ si trovano inizialmente alle temperature T_1 e T_2.

1. Si mettono in contatto i due corpi. Calcolare la temperatura finale di equilibrio.
2. Calcolare la variazione di entropia del sistema.
3. Considerando nuovamente lo stato iniziale, calcolare il massimo lavoro che è possibile estrarre dal sistema.

Soluzione

Domanda 1

Dato che il sistema dei due corpi è isolato, la somma dei calori assorbiti deve essere nulla. Quindi

$$\int_{T_1}^{T_f} \alpha T dT + \int_{T_2}^{T_f} \alpha T dT = 0$$

da cui

$$T_f = \sqrt{\frac{1}{2}\left(T_1^2 + T_2^2\right)}$$

Domanda 2

$$\begin{aligned}
\Delta S &= \int_{T_1}^{T_f} \alpha dT + \int_{T_2}^{T_f} \alpha dT \\
&= 2\alpha\left(T_f - \frac{T_1 + T_2}{2}\right) \\
&= 2\alpha\left(\sqrt{\frac{T_1^2 + T_2^2}{2}} - \frac{T_1 + T_2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Domanda 3

Per ottenere il massimo lavoro si deve procedere reversibilmente, quindi $\Delta S = 0$. Questo significa

$$T_f = \frac{1}{2}\left(T_1 + T_2\right)$$

Detti Q_1 e Q_2 i calori ceduti ai due corpi, dal primo principio abbiamo

$$Q_1 + Q_2 + W = 0$$

dove W è il lavoro ottenuto. Di conseguenza

$$\begin{aligned}
W = -Q_1 - Q_2 &= \frac{\alpha}{2}\left[T_1^2 + T_2^2 - 2T_f^2\right] \\
&= \alpha\left\{\frac{1}{2}\left(T_1^2 + T_2^2\right) - \left[\frac{1}{2}\left(T_1 + T_2\right)\right]^2\right\} \\
&= \frac{\alpha}{4}\left(T_1 - T_2\right)^2
\end{aligned}$$