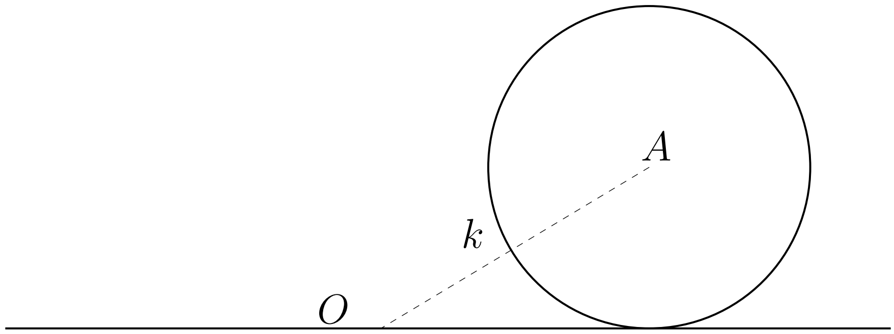
1.6. 10 settembre 2010

Problema 1 (15 punti)



Il cilindro in figura, di raggio R e massa M, rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Il suo centro A è fissato ad un punto O del piano da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Inizialmente A si trova sulla verticale di O.

1. Per quale valore minimo della velocità angolare iniziale il cilindro riesce a compiere un giro completo.
2. Scelta un'opportuna coordinata scrivere l'equazione del moto del cilindro.
3. Determinare la frequenza delle oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.

Problema 2 (15 punti)

Due corpi di capacità termica costante C sono inizialmente ad una temperatura T_i, e sono collegati mediante una macchina termica ciclica. Si vuole raffreddare il primo dei due corpi ad una temperatura finale $T_1 < T_i$, e si trova che per farlo è necessario fare un lavoro W.

1. Supponendo di conoscere W calcolare T_2.
2. Supponendo che la macchina termica sia reversibile, calcolare $W = W_R$.
3. Se in realtà il lavoro necessario è $W = kW_R$, dove k è una costante data, calcolare la variazione di entropia del sistema. Può accadere che $k < 1$?

Soluzione problema 1

Domanda 1 L'energia del sistema vale

$$E = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k \left[R^2 + R^2\theta^2 \right]$$

dove θ è l'angolo di rotazione del cilindro e $I = \frac{3}{2}mR^2$ il suo momento di inerzia relativo ad un asse passante per il punto di appoggio sul piano. Abbiamo quindi

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = 2kR^2\pi^2$$

da cui

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4kR^2\pi^2}{I}} = \sqrt{\frac{8k\pi^2}{3m}}$$

Domanda 2 Dalla seconda equazione cardinale otteniamo

$$I\ddot{\theta} = -k\ell\frac{R\theta}{\sqrt{R^2+R^2\theta^2}}R$$

dove

$$\ell = \sqrt{R^2+R^2\theta^2}$$

è la lunghezza della molla. Sostituendo abbiamo

$$I\ddot{\theta} + kR^2\theta = 0$$

Domanda 3 Dall'equazione del moto precedente si trova immediatamente

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kR^2}{I}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

Soluzione problema 2

Domanda 1 Se Q_1 è il calore estratto dal primo corpo, e Q_2 quello fornito al secondo, dal primo principio abbiamo

$$Q_2 - Q_1 = W$$

ma d'altra parte

$$\begin{aligned} Q_2 &= C\left(T_2 - T_i\right) \\ Q_1 &= -C\left(T_1 - T_i\right) \end{aligned}$$

e quindi

$$W = C\left(T_1 + T_2 - 2T_i\right)$$

da cui

$$T_2 = \frac{W}{C} + 2T_i - T_1 \tag{1.6.1}$$

Domanda 2 Se la macchina è reversibile l'entropia del sistema non è cambiata. Quest'ultima si scrive come

$$dS = -\frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2}$$

ed integrando

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int_{T_i}^{T_1} \frac{CdT'}{T'} + \int_{T_i}^{T_2} \frac{CdT'}{T'} \\ &= C \log \frac{T_1 T_2}{T_i^2}\end{aligned} \tag{1.6.2}$$

Quindi

$$T_2 = \frac{T_i^2}{T_1}$$

e

$$W_R = CT_i \left(\frac{T_1}{T_i} + \frac{T_i}{T_1} - 2 \right) \equiv CT_i \left(x + \frac{1}{x} - 2 \right) \tag{1.6.3}$$

con $x = T_1/T_i$.

Domanda 3 Mettendo insieme l'Equazione (1.6.1) e l'Equazione (1.6.2) otteniamo

$$x \left(\frac{kW_R}{CT_i} + 2 - x \right) = e^{\Delta S/C}$$

ossia

$$(k-1)(x-1)^2 = e^{\Delta S/C} - 1$$

Dato che $\Delta S \geq 0$, segue che $k \geq 1$. Infine

$$\Delta S = C \log \left[1 + (k-1)(x-1)^2 \right]$$