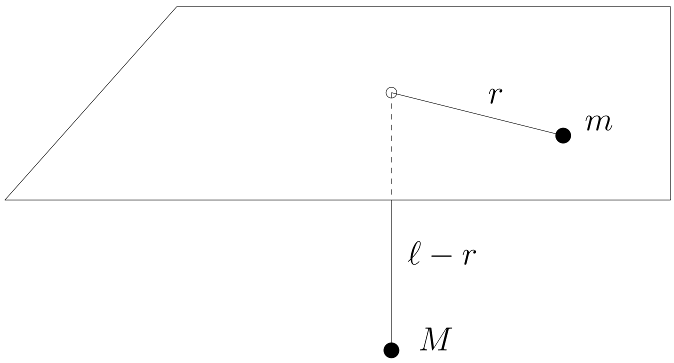
1.7. 10 febbraio 2011

Problema 1 (15 punti)



Una massa m si muove su un piano orizzontale privo di attrito, ed è collegata come in figura ad un'altra massa M mediante una fune inestensibile di lunghezza ℓ. La massa pende verticalmente ed il filo è libero di scorrere.

1. Inizialmente la massa m si muove su un'orbita circolare con $r = \ell/2$. Determinare il periodo.
2. Si prende la massa M e la si sposta molto lentamente verso il basso di un tratto $\ell/4$. Calcolare il periodo della nuova orbita circolare.
3. Si lascia andare improvvisamente la massa M. Determinare il valore massimo e minimo di r della nuova orbita.

Problema 2 (15 punti)

Tre corpi di uguale capacità termica C si trovano inizialmente alle temperature $T_1 = T_0$, $T_2 = 2T_0$ e $T_3 = 5T_0$.

1. Determinare la temperatura finale del sistema se i corpi sono posti in contatto e liberi di scambiarsi spontaneamente calore.
2. Determinare la variazione di entropia del sistema nel caso precedente.
3. Qual'è la massima temperatura a cui è possibile portare uno dei tre corpi se il sistema è isolato.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Ponendo la tensione uguale alla massa per l'accelerazione centripeta abbiamo

$$m\omega^2\frac{\ell}{2} = Mg$$

e quindi

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell}{2Mg}}$$

Domanda 2

Durante il processo si conserva il momento angolare, e l'orbita resta circolare. Quindi

$$L = m\omega\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = m\omega'\left(\frac{\ell}{4}\right)^2$$

da cui

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\omega}\frac{\omega}{\omega'} = \frac{1}{4}T$$

Domanda 3

Utilizzando il potenziale efficace abbiamo ai punti di inversione

$$\frac{L^2}{2mr^2} + Mgr = \frac{L^2}{2mr_-^2} + Mgr_-$$

dove $r_- = \ell/4$ è la distanza iniziale. Quindi

$$\frac{L^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_-^2}\right) + Mg\left(r - r_-\right) = 0$$

Possiamo scrivere anche

$$\frac{L^2}{2m}\left(r_-^2 - r^2\right) + Mgr^2 r_-^2\left(r - r_-\right) = 0$$

che ha per soluzione chiaramente $r = r_-$. Semplificando otteniamo infine

$$\frac{8L^2}{Mmg\ell^2}\left(r_- + r\right) - r^2 = 0$$

da cui

$$r = \frac{4L^2}{Mmg\ell^2} \pm \sqrt{\left(\frac{4L^2}{Mmg\ell^2}\right)^2 + \frac{8L^2 r_-}{Mmg\ell^2}}$$

La soluzione accettabile corrisponde alla distanza di massimo allontanamento cercata

$$r = \frac{4L^2}{Mmg\ell^2} + \sqrt{\left(\frac{4L^2}{Mmg\ell^2}\right)^2 + \frac{2L^2}{Mmg\ell}}$$

con

$$L=\sqrt{\frac{mMg\ell^3}{8}}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dalla conservazione dell'energia abbiamo

$$C\left(T_1+T_2+T_3\right)=3CT_f$$

e quindi

$$T_f=\frac{8T_0}{3}$$

Domanda 2

Abbiamo5

$$\begin{aligned}\Delta S &= C\log\frac{T_f}{T_1}+C\log\frac{T_f}{T_2}+C\log\frac{T_f}{T_3}\\ &= C\log\frac{T_f^3}{T_1T_2T_3}\\ &= C\log\left[\frac{1}{10}\left(\frac{8}{3}\right)^3\right]\simeq 0.64C\end{aligned}$$

Domanda 3

Possiamo immaginare che nella situazione finale due corpi saranno alla stessa temperatura, dato che se così non fosse potremmo estrarre da essi del lavoro e impiegarlo per innalzare ulteriormente la temperatura del terzo. Abbiamo la conservazione dell'energia:

$$8CT_0=C\left(2T_-+T_+\right)$$

e per la variazione di entropia

$$\Delta S=C\log\frac{T_-^2T_+}{10T_0^3}=0$$

che abbiamo posto nulla dato che il risultato migliore si otterrà operando reversibilmente. Mettendo insieme le due equazioni abbiamo

$$\begin{aligned}T_-^2T_+ &= 10T_0^3\\ T_- &= 4T_0-\frac{1}{2}T_+\end{aligned}$$

ed eliminando T_-

$$T_+ \left(4T_0 - \frac{1}{2}T_+\right)^2 = 10T_0^3$$

ossia

$$\frac{1}{4}T_+^3 - 4T_0T_+^2 + 16T_0^2T_+ - 10T_0^3 = 0$$

Ponendo $x = T_+/T_0$

$$x^3 - 16x^2 + 64x - 40 = 0$$

che si può scomporre

$$(x-10)\left(x^2 - 6x + 4\right) = 0$$

abbiamo quindi le soluzioni

$$\begin{aligned}
T_+ &= 10T_0 \\
T_+ &= \left(3 - \sqrt{5}\right) T_0 \simeq 0.764T_0 \\
T_+ &= \left(3 + \sqrt{5}\right) T_0 \simeq 5.24T_0
\end{aligned}$$

La prima non è accettabile, perchè

$$T_- = 4T_0 - \frac{1}{2}T_+ = -T_0$$

Le altre due sono accettabili, ma quella cercata è la terza. Infatti si ha per essa

$$T_- = 4T_0 - \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right) T_0 \simeq 1.38T_0 < T_+$$

mentre la seconda corrisponde a

$$T_- = 4T_0 - \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right) T_0 \simeq 3.62T_0 > T_+$$