2.10. 21 gennaio 2010

Problema 1

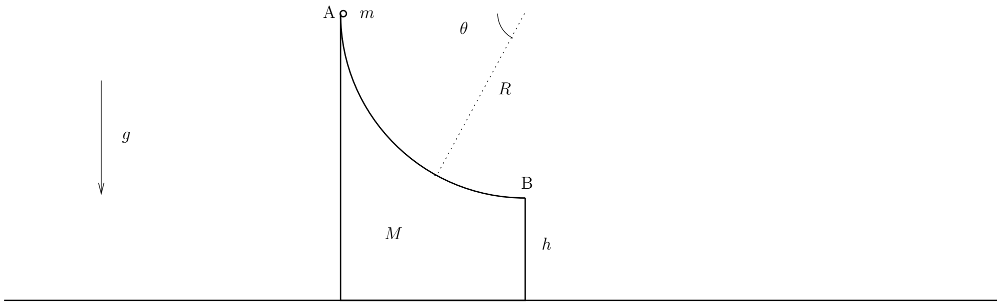
Un punto materiale di massa m viene lanciato a $t = 0$ con velocità iniziale v_0 in modulo e con una direzione che forma un angolo θ con il piano orizzontale $y = 0$. Fino a quando non ricade sul piano, il suo moto si svolge sotto l'azione di una forza $\vec{F}(x, y)$ non nota secondo le leggi orarie

$$x = at \quad (2.10.1)$$
$$y = b \sin kt \quad (2.10.2)$$

dove k è una costante nota.

1. Determinare a e b in termini di v_0, k e θ.
2. Trovare la traiettoria, e discutere i valori possibili della gittata.
3. Determinare $\vec{F}(x, y)$.

Problema 2



Una particella di massa m viene lasciata libera nel punto A con velocità iniziale nulla, e scivola sulla guida priva di attrito fino al punto B. La guida ha il profilo superiore di un quarto di circonferenza di raggio R, massa M, può muoversi sul piano orizzontale liscio ed è pure inizialmente ferma. Il punto B è ad una altezza h da terra.

1. Determinare lo spostamento della guida quando la particella arriva in B.
2. Determinare la velocità della particella quando, dopo essersi staccata dalla guida in B, arriva a terra.
3. Se nel punto B avviene un urto completamente anelastico con un ostacolo attaccato alla guida, dopo il quale la particella rimane fissata ad esso, determinare la velocità finale del sistema.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Derivando si ottengono le componenti della velocità

$$\dot{x}(t) = a \quad (2.10.3)$$
$$\dot{y}(t) = bk\cos kt \quad (2.10.4)$$

ed ponendo $\dot{x}(0) = v_0\cos\theta$ e $\dot{y}(0) = v_0\sin\theta$ si trova

$$a = v_0\cos\theta \quad (2.10.5)$$
$$b = \frac{v_0}{k}\sin\theta \quad (2.10.6)$$

Domanda 2

Sostituendo $t = x/a$ nella seconda equazione si trova

$$y = b\sin\left(\frac{kx}{a}\right) = \frac{v_0\sin\theta}{k}\sin\left(\frac{kx}{v_0\cos\theta}\right) \quad (2.10.7)$$

Per calcolare la gittata poniamo $y = 0$. Questo significa (supponendo $0 < \theta < \pi/2$)

$$d = \frac{\pi v_0}{k}\cos\theta \quad (2.10.8)$$

quindi la gittata è tanto maggiore quanto più piccolo è θ, al limite $d = \pi v_0/k$.

Domanda 3

Derivando due volte rispetto al tempo si trova

$$\ddot{x} = 0 \quad (2.10.9)$$
$$\ddot{y} = -bk^2\sin kt \quad (2.10.10)$$

ossia

$$\vec{F} = m\ddot{x}\hat{x} + m\ddot{y}\hat{y} = -mk^2y\hat{y} \quad (2.10.11)$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che si conserva la quantità di moto orizzontale del sistema l'ascissa del centro di massa non cambia. Calcolando quest'ultimo all'inizio e alla fine abbiamo

$$x_{cm} = \frac{mx^{(i)} + MX^{(i)}}{m+M} = \frac{m\left(x^{(i)}+\delta\right) + M\left(X^{(i)}+\Delta\right)}{m+M} \quad (2.10.12)$$

dove si è indicato con δ e Δ gli spostamenti orizzontali finali della particella e della guida. Inoltre lo spostamento orizzontale finale della particella relativo alla guida vale

$$\delta - \Delta = R \tag{2.10.13}$$

e sostituendo $\delta^{(i)}$ nella prima relazione abbiamo

$$\Delta = -\frac{m}{m+M} R \tag{2.10.14}$$

Domanda 2

L'energia del sistema si conserva, e si può scrivere nella forma

$$E = \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m \left[\left(\dot{X} + R\dot{\theta} \sin\theta \right)^2 + R^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta \right] - mgR\sin\theta \tag{2.10.15}$$

dove si sono scelte come coordinate la posizione orizzontale della guida e l'angolo in figura. Anche la quantità di moto orizzontale si conserva, e vale

$$P_x = M\dot{X} + m \left(\dot{X} + R\dot{\theta} \sin\theta \right) \tag{2.10.16}$$

Inizialmente $E = 0$ e $P_x = 0$. Quando la particella arriva in B ($\theta = \pi/2$) avremo quindi

$$(M + m)\dot{X} + mR\dot{\theta} = 0 \tag{2.10.17}$$

e

$$\frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{X} + R\dot{\theta} \right)^2 - mgR = 0 \tag{2.10.18}$$

da cui

$$\dot{X} = -\frac{mR}{m+M} \dot{\theta} \tag{2.10.19}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R} \left(1 + \frac{m}{M} \right)} \tag{2.10.20}$$

Infine

$$v_x = \dot{X} + R\dot{\theta} \sin\frac{\pi}{2} = \sqrt{2gR \left(\frac{M}{M+m} \right)} \tag{2.10.21}$$

$$v_y = -R\dot{\theta} \cos\frac{\pi}{2} = 0 \tag{2.10.22}$$

Il moto che segue sarà a velocità uniforme lungo x, e uniformemente accelerato ($a = -g$)

lungo y. Quindi al momento di arrivare a terra

$$v_x = \sqrt{2gR\left(\frac{M}{M+m}\right)} \tag{2.10.23}$$

$$v_y = -\sqrt{2gh} \tag{2.10.24}$$

Domanda 3

La velocità del centro di massa in direzione orizzontale è sempre nulla, quindi dopo l'urto il sistema è fermo.