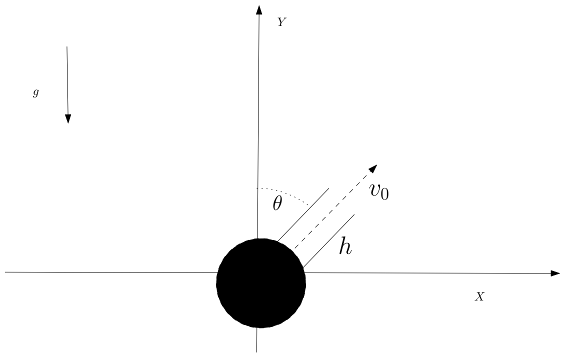
2.11. 12 febbraio 2010

Problema 1



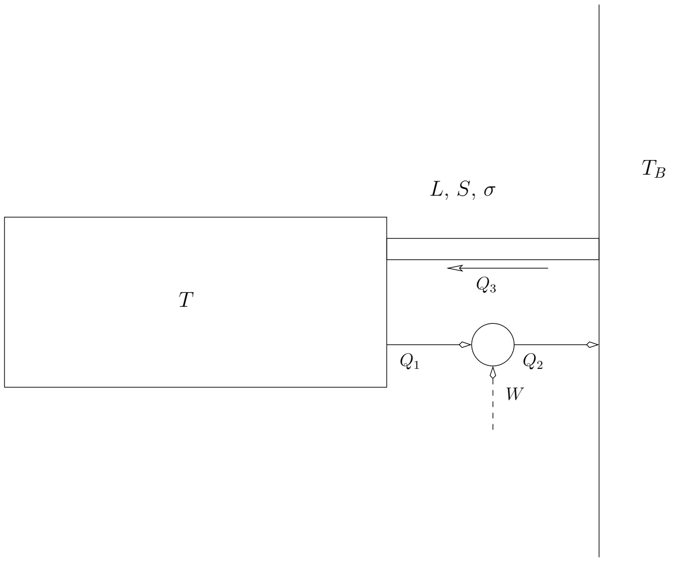
Un irrigatore da giardino espelle un getto d'acqua da un ugello di lunghezza h orientato come in figura. La velocità dell'acqua relativa all'ugello è costante e vale v_0, e in tutte le domande che seguono si può considerare il limite $h \to 0$.

1. Come si deve orientare l'ugello per irrigare il più lontano possibile? Quanto vale la distanza raggiunta in tal caso?

2. Supponendo che θ percorra molto lentamente tutto l'intervallo $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ determinare la regione nella quale una mosca di passaggio corre il rischio di bagnarsi, nella forma $y < y_{max}(x)$..

3. Calcolare la massima distanza raggiunta dall'acqua se l'orientazione dell'ugello varia secondo la legge
$$\theta(t) = \frac{\pi}{2}\left(-1 + \frac{u}{h}t\right) \tag{2.11.1}$$
nell'intervallo $0 < t < 2h/u$, dove u è una costante.

Problema 2



Un punto materiale di massa m è fissato ad un estremo di un'asta di lunghezza ℓ. L'altro estremo dell'asta, che è priva di massa, è fissato all'origine di un sistema di coordinate cartesiane, ma libero di ruotare. Inoltre la massa e collegata mediante una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k ad un punto posto sulla verticale dell'origine, ad un'altezza $h > 0$.

1. Sotto quali condizioni $\theta = 0$ è una posizione di equilibrio stabile?

2. Nel caso $h = mg/k$ la particella si trova nella posizione $\theta = 0$ con velocità v_0. Determinare dopo quanto tempo $\theta = \pi$.

3. Nel caso $h = \frac{1}{2}mg/k$ la particella si trova inizialmente in $\theta = 0$ con velocità praticamente nulla. Calcolare la forza applicata dalla sbarra alla particella per $\theta = \pi/2$, sapendo che è diretta orizzontalmente.

Soluzione primo problema

Domanda 1 Le equazioni del moto sono, per un dato θ,

$$\begin{aligned} x &= v_0 \sin\theta\, t \\ y &= v_0 \cos\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

e il tempo di volo si trova ponendo $y = 0$:

$$t^* = \frac{2v_0 \cos\theta}{g}$$

Sostituendo troviamo la gittata

$$x(t^*) = \frac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

che è massima per $\theta = \pi/4$. In tale caso vale

$$x_{max}(t^*) = \frac{v_0^2}{g} \tag{2.11.2}$$

Domanda 2 La traiettoria si scrive

$$y = \frac{x}{\tan\theta} - \frac{g}{2v_0^2 \sin^2\theta} x^2 \tag{2.11.3}$$

e a fissato x possiamo determinare l'altezza massima raggiunta dall'acqua, massimizzando rispetto all'angolo θ. Conviene riscrivere la traiettoria nella forma

$$y = x\cot\theta - \frac{g}{2v_0^2}\left(1 + \cot^2\theta\right) x^2 \tag{2.11.4}$$

e derivare rispetto a $\cot\theta$:

$$\frac{dy}{d\cot\theta} = x - \frac{gx^2}{v_0^2}\cot\theta = 0 \tag{2.11.5}$$

Sostituendo si trova

$$y_{max}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2}{v_0^2}\right) \tag{2.11.6}$$

Domanda 3 Osserviamo che l'ugello ruota con velocità angolare costante (infinita nel limite $h \to 0$)

$$\omega = \frac{\pi}{2}\frac{u}{h}$$

e la sua estremità con velocità $v_T = \frac{\pi}{2}u$. Il modulo della velocità del getto d'acqua all'istante in cui esce dall'ugello sarà quindi

$$V_0 = \sqrt{v_0^2 + \frac{\pi^2}{4}u^2}$$

Per quanto riguarda la direzione, osserviamo che l'angolo ϕ tra il getto e la verticale assumerà sicuramente il valore $\pi/4$ corrispondente alla massima gittata, e quindi quest'ultima sarà data semplicemente da

$$d = \frac{V_0^2}{g} = \frac{v_0^2 + \frac{\pi^2}{4}u^2}{g} \tag{2.11.7}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1 Scriviamo l'energia potenziale, come somma di quella gravitazionale e di quella elastica:

$$U = mg\ell\cos\theta + \frac{1}{2}k\left[(h-\ell\cos\theta)^2 + \ell^2\sin^2\theta\right] = \ell\,(mg-kh)\cos\theta + \text{costante}$$

Per la stabilità è necessario che essa abbia un minimo in $\theta = 0$. Questo accade se

$$h > \frac{mg}{k}$$

Domanda 2 Se $h = mg/k$ il potenziale è costante, in altre parole l'energia è solo quella cinetica

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

e l'equazione del moto da

$$\ddot{\theta} = 0$$

Quindi la velocità angolare è costante, e la particella si muove di moto circolare uniforme. Il tempo necessario a percorrere metà circonferenza sarà quindi

$$\tau = \frac{\pi\ell}{v_0}$$

Domanda 3 In questo caso l'energia si scrive

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mg\ell\cos\theta = \frac{1}{2}mg\ell$$

Possiamo scrivere quindi

$$v^2 = g\ell\,(1-\cos\theta) \tag{2.11.8}$$

che calcolato in $\theta = \pi/2$ dà il quadrato della velocità quando la particella arriva nella posizione finale desiderata.

Scriviamo l'equazione del moto nella direzione orizzontale che deve valere in tale istante:

$$-m\frac{v^2}{\ell} = F - k\ell \tag{2.11.9}$$

dove F è la forza cercata. Sostituendo troviamo

$$F = k\ell - mg \tag{2.11.10}$$