2.12. 23 giugno 2010

Problema 1

Una pallina di massa m, che si può approssimare come un punto materiale, si trova inizialmente in quiete su in piano orizzontale privo di attrito. Un corpo della forma in figura (il profilo superiore è un quarto di circonferenza di raggio R), di uguale massa, viene lanciato verso di esso con velocità iniziale v_0.

1. Per quale valore della velocità iniziale v_0^* la pallina giunge alla sommità del corpo?
2. Supponendo $v_0 < v_0^*$ determinare la velocità del corpo quando la pallina raggiunge l'altezza massima.
3. Supponendo adesso $v_0 > v_0^*$, determinare la forza applicata dalla pallina al corpo al momento del distacco da esso.

Problema 2

Un punto materiale di massa m si muove in un piano orizzontale, confinato in una regione circolare di raggio R da una parete cilindrica su cui può rimbalzare elasticamente. Il punto è inoltre fissato al centro della regione da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Ricordiamo che in assenza della parete le orbite sono ellittiche.

1. Per quali valori dell'energia E_0 e del momento angolare iniziale L_0 (valutato rispetto al centro della regione) la particella urta le pareti?
2. Per quali valori del momento angolare sono possibili orbite circolari?
3. Calcolare l'impulso ceduto alle pareti in un urto, in funzione di E_0 e L_0.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Usando la conservazione dell'energia nel sistema del centro di massa abbiamo

$$\frac{1}{2}\mu\left(v_0^*\right)^2 = mgR$$

dove $\mu = m/2$ è la massa ridotta. Segue

$$v_0^* = \sqrt{4gR}$$

Domanda 2

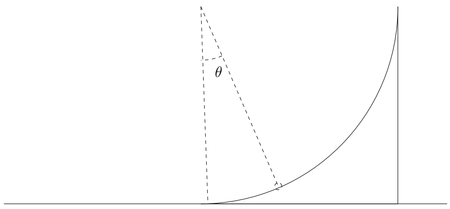
Quando la pallina raggiunge l'altezza massima si muove con la stessa velocità V (orizzontale) del corpo. Dalla conservazione della quantità di moto orizzontale troviamo

$$mv_0 = 2mV$$

e quindi

$$V = \frac{v_0}{2}$$

Domanda 3



Detta X la posizione orizzontale del centro dell'arco di circonferenza, e θ l'angolo che determina la posizione della pallina su di esso come in figura, possiamo scrivere la quantità di moto orizzontale come

$$P = m\left(2\dot{X} + R\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

Da questa seconda relazione otteniamo

$$m\dot{X} = \frac{1}{2}\left(P - mR\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

e derivando abbiamo la forza applicata al corpo

$$F = m\ddot{X} = \frac{1}{2}\left(mR\dot{\theta}^2\sin\theta - mR\ddot{\theta}\cos\theta\right)$$

Al momento del distacco $\theta = \pi/2$ e quindi

$$F = \frac{1}{2}mR\dot{\theta}^2$$

Ricaviamo $\dot{\theta}^2$ dalla conservazione dell'energia. Nel momento del distacco l'energia nel sistema del centro di massa vale

$$E = \frac{1}{2}\mu R^2\dot{\theta}^2 + mgR = \frac{1}{2}\mu v_0^2$$

e quindi

$$\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R^2} - \frac{4g}{R}$$

da cui

$$F = \frac{m}{2R}\left(v_0^2 - 4gR\right)$$

Notare che $F = 0$ se $v_0 = v_0^*$.

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Senza le pareti possiamo scrivere l'energia totale (conservata) nella forma

$$E_0 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{k}{2}r^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2}$$

dove L è il momento angolare rispetto al centro, pure conservato. Il massimo e il minimo allontanamento dal centro sono determinati da $\dot{r} = 0$, ossia

$$r^4 - \frac{2E_0}{k}r^2 + \frac{L_0^2}{km} = 0$$

Risolvendo troviamo

$$r^2 = \frac{E_0}{k} \pm \sqrt{\frac{E_0^2}{k^2} - \frac{L_0^2}{km}}$$

da cui la condizione per avere un urto

$$\frac{E_0}{k} + \sqrt{\frac{E_0^2}{k^2} - \frac{L_0^2}{km}} > R$$

Domanda 2

In un'orbita circolare la distanza massima e minima dal centro coincidono. Dall'equazione scritta precedentemente segue che deve essere

$$\frac{E_0^2}{k^2} = \frac{L_0^2}{km}$$

Inoltre

$$r^2 = \frac{E_0}{k} = \frac{|L_0|}{\sqrt{km}}$$

da cui si trova che orbite circolari saranno possibili per

$$|L_0| < R^2\sqrt{km}$$

Domanda 3

Quando arriva ad urtare contro la parete la particella ha una quantità di moto radiale $p_r = m\dot{r}$ determinata da

$$E_0 = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{k}{2}R^2 + \frac{L_0^2}{2mR^2}$$

ossia, risolvendo,

$$p_r = \sqrt{2m\left(E_0 - \frac{k}{2}R^2 - \frac{L_0^2}{2mR^2}\right)}$$

Nell'urto p_r cambia di segno, mentro la quantità di moto tangenziale resta costante. L'impulso ceduto, in direzione radiale. è dunque

$$-\Delta p_r = 2\sqrt{2m\left(E_0 - \frac{k}{2}R^2 - \frac{L_0^2}{2mR^2}\right)}$$