2.15. 10 febbraio 2011

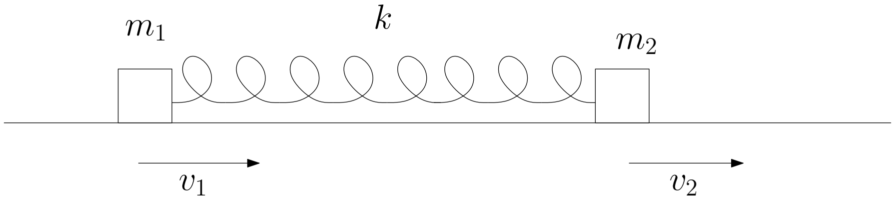
Problema 1 (15 punti)

Una particella si muove su una circonferenza di raggio R con velocità tangenziale

$$v(t) = A \sin \omega t$$

1. Calcolare l'accelerazione in modulo, direzione e verso.
2. Calcolare il valore massimo raggiunto dal modulo dell'accelerazione.
3. Per quale valore minimo di $|A|$ la particella percorre completamente la circonferenza?

Problema 2 (15 punti)



Due masse m_1, m_2 sono collegate da una molla con lunghezza a riposo nulla e costante elastica k. Inizialmente le due masse si trovano ad una distanza $2a$.

1. Se le velocità iniziali delle masse sono nulle, $v_1 = v_2 = 0$, dopo quanto tempo queste si urtano?
2. Calcolare il massimo allungamento della molla se $v_1 = 0$ e $v_2 = V$.
3. Supponiamo adesso che le velocità iniziali siano identiche, $v_1 = v_2 = V$. Dopo quanto tempo le due masse si urtano? Se l'urto è completamente anelastico e le due masse rimangono attaccate, qual'è la velocità finale del sistema?

Soluzione primo problema

Domanda 1

Abbiamo una accelerazione centripeta e una tangenziale, date da

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\hat{e}_r + \dot{v}\hat{e}_\theta$$

e quindi

$$\vec{a} = -\frac{A^2}{R}\sin^2 \omega t\, \hat{e}_r + A\omega \cos \omega t\, \hat{e}_\theta$$

Domanda 2

Il modulo quadro dell'accelerazione vale

$$a^2 = \frac{A^4}{R^2}\sin^4\omega t + A^2\omega^2\cos^2\omega t$$

che possiamo anche scrivere come

$$a^2 = \frac{A^4}{R^2}x^2 + A^2\omega^2\left(1-x\right)$$

con $x = \sin^2\omega t$, $0 \le x \le 1$. Questa funzione ha un minimo all'interno dell'intervallo, il massimo quindi sarà per $x = 1$ o $x = 0$, cioè

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{A^4}{R^2} \quad (x=1) \\ a^2 &= A^2\omega^2 \quad (x=0) \end{aligned}$$

Il primo valore andrà scelto se

$$A^2 > R^2\omega^2$$

altrimenti il secondo.

Domanda 3

Lo spazio percorso è dato da

$$s(t) = \int v(t)dt = -\frac{A}{\omega}\cos\omega t$$

e perchè tutta la circonferenza sia percorsa deve essere almeno

$$2\frac{|A|}{\omega} = 2\pi R$$

ossia

$$|A| = \pi R\omega$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

L'equazione per il moto relativo si scrive

$$\mu\ddot{x} = -kx$$

che ha per soluzione

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega}\sin\omega t$$

Nel nostro caso la velocità iniziale relativa è nulla, e la separazione relativa $2a$, quindi

$$x(t) = 2a\cos\omega t$$

e l'urto avviene al tempo τ dato da $\omega\tau = \pi/2$,

$$\tau = \frac{\pi}{2\omega}$$

Domanda 2

Usando la conservazione dell'energia disponibile nel centro di massa abbiamo

$$\frac{1}{2}\mu V^2 + \frac{k}{2}(2a)^2 = \frac{k}{2}\ell_{MAX}^2$$

cioè

$$\ell_{MAX} = \sqrt{4a^2 + \frac{\mu}{k}V^2}$$

Domanda 3

Nel sistema del centro di massa il problema è equivalente a quello visto alla prima domanda, e quindi

$$\tau = \frac{\pi}{2\omega}$$

La velocità finale del sistema sarà quella del centro di massa, cioè V.