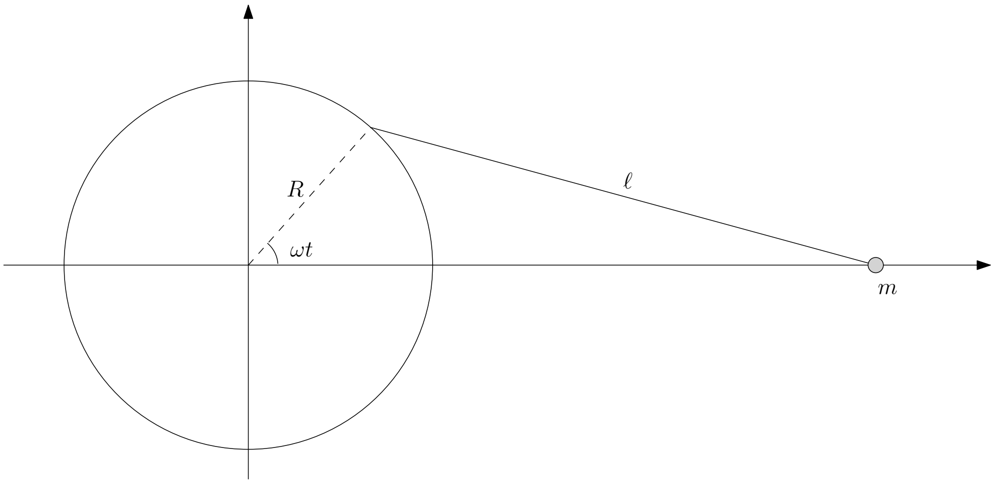
2.16. 2 marzo 2011

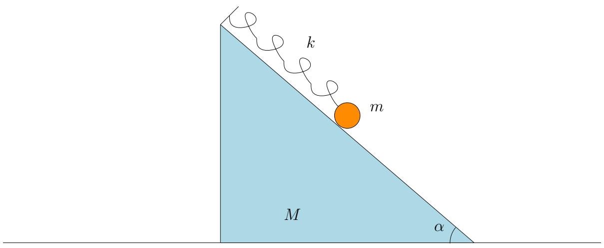
Problema 1 (15 punti)



Una massa m è vincolata a muoversi su una retta, ed è collegata ad un estremo di una sbarra di lunghezza ℓ. L'altro estremo di quest'ultima è collegato ad un disco di raggio $R < \ell$, come in figura. Entrambi gli estremi sono liberi di ruotare e non è presente alcun tipo di attrito. Se il disco ruota con velocità costante ω,

1. determinare la velocità della massa in funzione del tempo;
2. dire se la velocità angolare della sbarra può annullarsi, e quando;
3. calcolare, sempre in funzione del tempo, la forza esercitata dalla sbarra sulla massa nel limite $\ell \gg R$.

Problema 2 (15 punti)



Un piano inclinato di un angolo α e di massa M è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito. Sopra ad esso si trova una particella di massa m, vincolata all'estremo superiore da una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k, come in figura.

1. Determinare la lunghezza della molla all'equilibrio.

2. Se inizialmente la massa si trova ferma nel punto più alto del piano e viene lasciata andare, quanto vale il massimo allungamento della molla?

3. Calcolare la frequenza delle oscillazioni del sistema.

Soluzione primo problema

Domanda 1

La posizione della massa rispetto al centro della circonferenza si scrive

$$x = R\cos\omega t + \sqrt{\ell^2 - R^2\sin^2\omega t}$$

e derivando troviamo la velocità

$$\dot{x} = -R\omega\sin\omega t - \frac{R}{\ell}\frac{R\omega\sin\omega t\cos\omega t}{\sqrt{1-\frac{R^2}{\ell^2}\sin^2\omega t}}$$

Domanda 2

L'angolo α che la sbarra forma con l'orizzontale è legato a ωt dalla relazione

$$\ell\sin\alpha = R\sin\omega t$$

e derivando rispetto al tempo troviamo

$$\ell\dot{\alpha}\cos\alpha = R\omega\cos\omega t$$

da cui

$$\dot{\alpha} = \frac{R\omega}{\ell}\frac{\cos\omega t}{\cos\alpha} = \frac{R\omega}{\ell}\frac{\cos\omega t}{\sqrt{1-\frac{R^2}{\ell^2}\sin^2\omega t}}$$

La velocità angolare è, a meno di un segno, $\dot{\alpha}$. Vediamo quindi che questa si annulla per $\omega t = \pi/2 + k\pi$.

Domanda 3

La forza F esercitata dalla sbarra sulla palla è diretta parallelamente alla sbarra stessa. Inoltre nella direzione orizzontale deve essere

$$m\ddot{x} = F\cos\alpha$$

e quindi

$$F = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{R^2}{\ell^2}\sin^2\omega t}}\ddot{x}$$

Nel limite $R/\ell \ll 1$ possiamo approssimare

$$\dot{x} \simeq -R\omega \sin \omega t$$

e quindi

$$\ddot{x} \simeq -R\omega^2 \cos \omega t$$

Sostituendo otteniamo infine

$$F \simeq -\frac{mR\omega^2}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{\ell^2} \sin^2 \omega t}} \cos \omega t \simeq -mR\omega^2 \cos \omega t$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Imponendo che le forze applicate alla particella parallele al piano siano nulle otteniamo

$$-k\ell_0 + mg \sin \alpha = 0$$

da cui

$$\ell_0 = \frac{mg \sin \alpha}{k}$$

Domanda 2

Dato che la quantità di moto orizzontale del sistema è inizialmente nullo e si conserva, il centro di massa non si sposta orizzontalmente. Sia all'istante iniziale che a quello di massimo allungamento la velocità della particella relativa al piano si annulla, e quindi entrambi i corpi sono fermi. Possiamo allora applicare la conservazione dell'energia ottenendo (ponendo $h = 0$ alla sommità del piano)

$$\begin{aligned} E_{iniziale} &= 0 \\ E_{finale} &= \frac{1}{2} k\ell_{max}^2 - mg\ell_{max} \sin \alpha \end{aligned}$$

da cui ponendo $E_{iniziale} = E_{finale}$

$$\ell_{max} = \frac{2mg \sin \alpha}{k}$$

Domanda 3

Scriviamo l'energia totale nella forma

$$E = \frac{1}{2} MV_x^2 + \frac{1}{2} mv_x^2 + \frac{1}{2} mv_y^2 + \frac{k}{2} \ell^2 - mg\ell \sin \alpha$$

ma dato che la quantità di moto orizzontale si conserva ed è nulla possiamo anche scrivere, applicando il teorema di Koenig

$$E = \frac{1}{2}\mu v_{r,x}^2 + \frac{1}{2}m v_{r,y}^2 + \frac{k}{2}\ell^2 - mg\ell\sin\alpha$$

dove $v_{r,x}$ e $v_{r,y} = v_y$ sono le velocità della particella relativa al piano e $\mu = mM/(m+M)$ la massa ridotta. D'altra parte

$$\begin{aligned} v_{r,x} &= \dot{\ell}\cos\alpha \\ v_{r,y} &= -\dot{\ell}\sin\alpha \end{aligned}$$

e quindi

$$E = \frac{1}{2}\left(\mu\cos^2\alpha + m\sin^2\alpha\right)\dot{\ell}^2 + \frac{k}{2}\ell^2 - mg\ell\sin\alpha$$

Derivando rispetto al tempo

$$\dot{E} = \left(\mu\cos^2\alpha + m\sin^2\alpha\right)\dot{\ell}\ddot{\ell} + k\ell\dot{\ell} - mg\dot{\ell}\sin\alpha = 0$$

da cui possiamo ricavare le equazioni del moto

$$\left(\mu\cos^2\alpha + m\sin^2\alpha\right)\ddot{\ell} + k\ell = mg\sin\alpha$$

Il sistema esegue qundi oscillazioni armoniche attorno al punto di equilibrio ℓ_0 calcolato precedentemente, con frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu\cos^2\alpha + m\sin^2\alpha}}$$