2.19. 20 gennaio 2012

Problema 1 (15 punti)

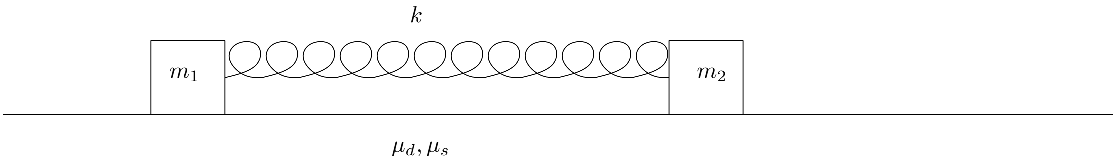
Un punto materiale si muove in un piano con un'accelerazione e una velocità il cui modulo è dato da $|\vec{a}| = a$ e $|\vec{v}| = v$.

1. Se $a(t) = a_0$ e $v(t) = v_0$, con a_0 e v_0 costanti, quanto vale l'angolo tra velocità e accelerazione?

2. Per le stesse accelerazioni e velocità della domanda precedente determinare la traiettoria.

3. Supponendo che per $t > 0$ il modulo della velocità valga $v(t) = \beta t$, con β costante positiva, come si deve scegliere $a(t)$ affinchè la traiettoria sia identica a quella precedentemente determinata?

Problema 2 (15 punti)



Due masse m_1, m_2 sono appoggiate su un piano orizzontale come in figura, ad una distanza ℓ_0 l'una dall'altra e inizialmente in quiete. Sono inoltre collegate da una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k. Tra piano e masse si ha attrito statico e dinamico, caratterizzato rispettivamente dai coefficienti μ_s e $\mu_d < \mu_s$.

1. Per quale valore minimo μ_s^* del coefficiente di attrito statico il sistema rimane in equilibrio?

2. Supponendo $\mu_s < \mu_s^*$, per quale valore massimo μ_d^* del coefficiente di attrito dinamico le due masse arrivano a toccarsi?

3. Se $\mu_s < \mu_s^*$ e $\mu_d = 2\pi\mu_d^*/(4+\pi)$ introducendo un opportuno sistema di riferimento dire in quale posizione e con che velocità relativa si scontrano le due masse.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Se il modulo della velocità è costante, allora l'accelerazione tangenziale alla traiettoria deve essere nulla. Quindi l'accelerazione è perpendicolare alla velocità.

Domanda 2

Per quanto visto al punto precedente l'accelerazione tangenziale è nulla. Quindi il modulo dell'accelerazione è uguale al modulo dell'accelerazione normale, da cui

$$a_0 = \frac{v_0^2}{\rho}$$

dove ρ è il raggio di curvatura della traiettoria, che è quindi costante. Il moto è quindi circolare uniforme, e la traiettoria una circonferenza di raggio $R = v_0^2/a_0$.

Domanda 3

Per avere ancora un moto circolare dovrà essere

$$a^2(t) = \dot{v}(t)^2 + \frac{v^4(t)}{R^2} = \beta^2 + \frac{a_0^2}{v_0^4}\beta^4 t^4$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Le forze che agiscono orizzontalmente sulle due masse devono essere zero:

$$\begin{aligned} F_{a,1} + k\ell_0 &= 0 \\ F_{a,2} - k\ell_0 &= 0 \end{aligned}$$

ma dato che $|F_{a,i}| < \mu_s m_i g$ avremo

$$\mu_s^* g \min(m_1, m_2) = k\ell_0$$

e quindi

$$\mu_s^* = \frac{k\ell_0}{g \min(m_1, m_2)}$$

Domanda 2

Le equazioni del moto si possono scrivere nella forma

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) &= -\mu_d m_1 g \\ m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) &= \mu_d m_2 g \end{aligned}$$

dove abbiamo approfittato del fatto che siamo interessati al solo caso in cui la velocità della massa m_1 è positiva e quella della massa m_2 è negativa. Per il moto relativo $\ell = x_2 - x_1$ possiamo scrivere

$$\mu\ddot{\ell} + k\ell = 2\mu_d \mu g$$

dove μ è la massa ridotta. Ma questo è un oscillatore armonico su cui agisce una forza costante, che possiamo descrivere con un'energia potenziale

$$U(\ell) = \frac{k}{2}\ell^2 - 2\mu_d \mu g \ell$$

Dato che nella configurazione iniziale e in quella finale che ci interessa l'energia cinetica si annulla, dovrà essere $U(\ell_0) = U(0)$ e quindi

$$\frac{k}{2}\ell_0^2 - 2\mu_d^* \mu g \ell_0 = 0$$

da cui

$$\mu_d^* = \frac{k\ell_0}{4\mu g}$$

Domanda 3

L'equazione per la coordinata relativa è la stessa della domanda precedente. Per il centro di massa abbiamo invece

$$\ddot{x}_{cm} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\mu_d g$$

e quindi un moto uniformemente accelerato. Ponendo l'origine del sistema di coordinate nella posizione della prima massa abbiamo

$$x_{cm} = \frac{m_2 \ell_0}{m_1 + m_2} + \frac{1}{2}\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\mu_d g t^2$$

Per determinare l'istante dello scontro risolviamo l'equazione del moto per la posizione relativa. Abbiamo

$$\ell(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t + \frac{2\mu_d \mu g}{k}$$

con $\Omega = \sqrt{k/\mu}$. Imponendo le condizioni iniziali

$$\ell(t) = \frac{2\mu_d \mu g}{k} + \left(\ell_0 - \frac{2\mu_d \mu g}{k}\right)\cos\Omega t$$

L'urto avviene al tempo τ determinato da

$$\cos\Omega\tau = \frac{2\mu_d \mu g}{k\ell_0 - 2\mu_d \mu g} = \frac{\pi}{4}$$

cioè per

$$\tau = \frac{1}{\Omega\sqrt{2}}$$

e sostituendo otteniamo la posizione del centro di massa, che è il punto nel quale avviene la collisione

$$x_{cm} = \left[m_2 + \frac{1}{8}\frac{\pi}{4+\pi}\left(m_2 - m_1\right)\right]\frac{\ell_0}{m_1+m_2}$$

Per la velocità relativa abbiamo analogamente

$$\begin{aligned}\dot{\ell}(\tau) &= -\Omega\left(\ell_0 - \frac{2\mu_d\mu g}{k}\right)\sin\Omega\tau \\ &= -\Omega\ell_0\frac{4}{4+\pi}\sqrt{1-\frac{\pi^2}{16}}\end{aligned}$$