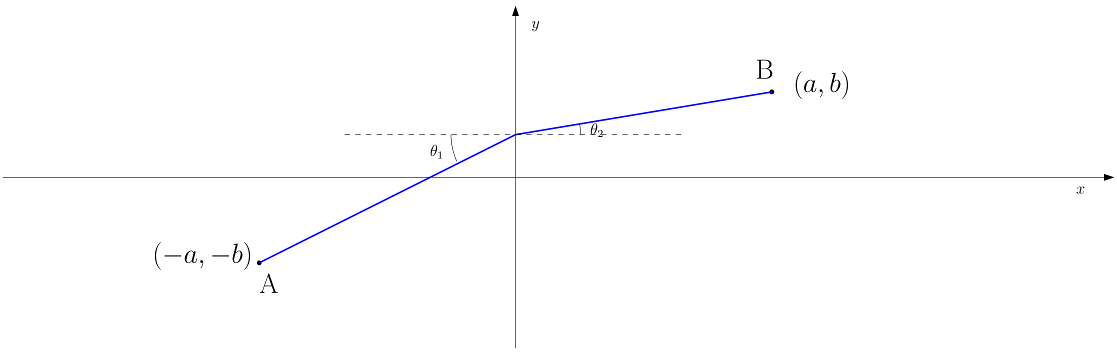
2.21. 18 gennaio 2013

Problema 1 (15 punti)



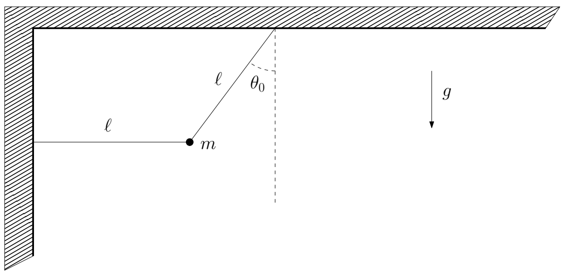
Una automobile di massa m si muove in un piano tra un punto iniziale A di coordinate $(x, y) = (-a, -b)$ ad un punto finale B di coordinate $(x, y) = (a, b)$ dove $a > 0$ e $b > 0$. La velocità dell'automobile vale in modulo v_1 per $x < 0$ e v_2 per $x > 0$. La direzione del moto può essere scelta arbitrariamente.

1. Calcolare il tempo necessario a muoversi da A a B supponendo di scegliere una traiettoria rettilinea.

2. Calcolare il modulo della velocità media, ed il lavoro che è stato fatto sull'automobile.

3. Considerando tra tutte le traiettorie del tipo rappresentato in figura (cioè rettilinee sia per $x < 0$ che per $x > 0$) quella corrispondente al tempo di percorrenza minimo, trovare una legge che lega gli "angoli di incidenza" θ_1 e θ_2 indipendente da a e b. Cosa succede se $v_1 = v_2$?

Problema 2 (15 punti)



La massa m in figura è in equilibrio, trattenuta da due fili inestensibili di massa nulla e lunghezza ℓ. Uno dei due fili è orizzontale, l'altro forma un angolo $\theta_0 = \pi/4$ con la verticale.

1. Calcolare le tensioni dei fili.

2. Si taglia il filo orizzontale, e il sistema inizia ad oscillare. Calcolare la velocità della massa quando $\theta = 0$.

3. Determinare la tensione del filo $T(\theta)$ in funzione dell'angolo durante l'oscillazione.

Soluzione primo problema

Domanda 1

La lunghezza della traiettoria rettilinea è $2\sqrt{a^2+b^2}$. Dato che metà viene percorsa con velocità v_1 e metà con velocità v_2 abbiamo

$$\begin{aligned} t &= t_1 + t_2 \\ &= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{v_2} \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right) \end{aligned}$$

Domanda 2

La velocità media sarà in modulo

$$v = \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{t} = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$$

ed il lavoro, per il teorema delle forze vive,

$$L = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

Domanda 3

Indicando con h l'ordinata del punto della traiettoria con $x=0$ abbiamo adesso

$$\begin{aligned} t &= t_1 + t_2 \\ &= \frac{\sqrt{a^2+(b+h)^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{a^2+(b-h)^2}}{v_2} \end{aligned}$$

Troviamo il tempo minimo:

$$\frac{dt}{dh} = \frac{h+b}{v_1\sqrt{a^2+(b+h)^2}} + \frac{h-b}{v_2\sqrt{a^2+(b-h)^2}} = 0$$

che si può anche scrivere

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

Se $v_1 = v_2$ troviamo $\theta_1 = \theta_2$ cioè la traiettoria è rettilinea.

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Imponendo che la somma delle forze agenti sulla massa m si annulli abbiamo

$$-T_1\hat{x} + T_2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\hat{x}+\hat{y}\right) - mg\hat{y} = 0$$

da cui

$$\begin{aligned} T_2 &= mg\sqrt{2} \\ T_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}T_2 = mg \end{aligned}$$

Domanda 2

Per la conservazione dell'energia

$$-mg\ell\cos\theta_0 = \frac{1}{2}mv^2 - mg\ell$$

da cui

$$v = \sqrt{2g\ell\left(1-\cos\theta_0\right)}$$

Domanda 3

Scriviamo l'equazione del moto nella direzione radiale:

$$-m\frac{v^2}{\ell} = -T + mg\cos\theta$$

da cui

$$T = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{\ell}$$

D'altra parte dalla conservazione dell'energia abbiamo

$$v^2 = 2g\ell\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)$$

e sostituendo

$$T = mg\left(3\cos\theta - 2\cos\theta_0\right)$$