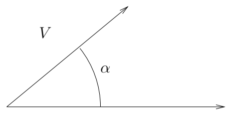
## 2.7. 23 giugno 2009

### Problema 1 (15 punti)



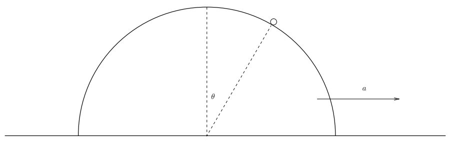

Una nave spaziale di massa $M$ con propulsione a reazione mantiene la direzione del getto di gas inclinata di un angolo $\alpha$ con la direzione del suo movimento, come in figura. Il gas viene emesso con velocità costante $V$ relativa alla nave, e anche la quantità di gas emessa per unità di tempo $\dot{m}$ è costante. Data una velocità iniziale $v_0$:

1. Calcolare il modulo della velocità della navicella in funzione della massa di gas emessa.

2. Nel caso particolare $\alpha = \pi/2$ determinare la traiettoria della nave

3. Considerando adesso il caso $\alpha = \pi$, la nave inizialmente ferma espelle la metà della sua massa raggiungendo una data velocità finale, quindi riorienta i propulsori ponendo $\alpha = 0$. Calcolare la massa che è necessario espellere per fermarsi.

### Problema 2 (15 punti)




La calotta sferica in figura, di raggio $R$ e massa $M$, è mantenuta in accelerazione costante $a$ mediante una opportuna forza esterna $F$. Un punto materiale di massa $m$ può scivolare senza attrito sulla sua superficie.

1. Determinare la posizione di equilibrio del punto materiale.

2. Supponendo che questo venga spinto leggermente lontano dalla posizione precedentemente determinata, determinare gli angoli di distacco.

3. Nella situazione precedente determinare la forza esterna $F$ nella condizione iniziale e al momento del distacco.

### Soluzione primo problema

### Domanda 1

Detta $\vec{v} = v\hat{\tau}$ la velocità della nave, abbiamo che la velocità del gas si potrà scrivere

$$\vec{v}_g = (V \sin \alpha)\, \hat{n} + (V \cos \alpha + v)\, \hat{\tau} \tag{2.7.1}$$

dove $\hat{\tau}$ è un versore normale e $\hat{n}$ un versore tangente alla traiettoria. Dato che la quantità di moto del sistema comprendente nave spaziale e gas espulso si conserva, possiamo scrivere

$$(M-m)\,\vec{v} = (M-m-dm)\,(\vec{v}+d\vec{v}) + dm\vec{v}_g \tag{2.7.2}$$

ossia

$$(M-m)\,\frac{d\vec{v}}{dm} = (\vec{v}-\vec{v}_g) \tag{2.7.3}$$

Prendendo il prodotto scalare con $\vec{v}$ troviamo

$$(M-m)\,\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dm} = \vec{v}\cdot(\vec{v}-\vec{v}_g) \tag{2.7.4}$$

ossia

$$\frac{1}{2}\,(M-m)\,\frac{dv^2}{dm} = (M-m)\,v\frac{dv}{dm} = -Vv\cos\alpha \tag{2.7.5}$$

che si può integrare direttamente

$$v = v_0 - V\cos\alpha\int_0^\mu \frac{dm}{M-m} = v_0 + V\cos\alpha\log\left(1-\frac{\mu}{M}\right) \tag{2.7.6}$$

### Domanda 2

Dall'equazione scritta precedentemente troviamo

$$(M-m)\,\frac{d\vec{v}}{dm} = -V\hat{n} \tag{2.7.7}$$

Scriviamo esplicitamente

$$\vec{\tau} = (\cos\theta, \sin\theta) \tag{2.7.8}$$

e

$$\hat{n} = (-\sin\theta, \cos\theta) \tag{2.7.9}$$

otteniamo

$$(M-m)\left(v\frac{d\theta}{dm}\hat{n} + \frac{dv}{dm}\hat{\tau}\right) = -V\hat{n} \tag{2.7.10}$$

da cui segue che il modulo della velocità è costante, mentre

$$\theta = \frac{V}{v}\log\left(1-\frac{m}{M}\right) = \frac{V}{v}\log\left(1-\frac{\dot{m}}{M}t\right) \tag{2.7.11}$$

e quindi

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{r}}{d\theta} = -\frac{\dot{m}V}{Mv}e^{-v\theta/V}\frac{d\vec{r}}{d\theta} = v\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \tag{2.7.12}$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = -\beta e^{k\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \tag{2.7.13}$$

dove per brevità si è posto

$$k = \frac{v}{V}, \qquad \beta = \frac{Mv^2}{\dot{m}V} \tag{2.7.14}$$

Integrando otteniamo l'equazione della traiettoria in forma parametrica

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \frac{\beta}{(1+k^2)} \begin{pmatrix} e^{k\theta}\left(k\cos\theta + \sin\theta\right) - k \\ e^{k\theta}\left(-\cos\theta + k\sin\theta\right) + 1 \end{pmatrix} \tag{2.7.15}$$

Scegliendo opportunamente la posizione iniziale otteniamo infine

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{\beta}{(1+k^2)} \begin{pmatrix} e^{k\theta}\left(k\cos\theta + \sin\theta\right) \\ e^{k\theta}\left(-\cos\theta + k\sin\theta\right) \end{pmatrix} \tag{2.7.16}$$

che si può anche scrivere, introducendo

$$\sin\phi = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \tag{2.7.17}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{\beta e^{k\theta}}{\sqrt{1+k^2}} \begin{pmatrix} \sin(\theta+\phi) \\ -\cos(\theta+\phi) \end{pmatrix} \tag{2.7.18}$$

quindi la traiettoria è una spirale.

### Domanda 3

Usando le equazioni precedenti vediamo che dopo aver espulso metà della sua massa la nave ha raggiunto la velocità

$$v = V\log 2\,. \tag{2.7.19}$$

Dopo avere orientato nuovamente i propulsori avremo

$$v = V\log 2 + V\log\left(1 - \frac{2\mu}{M}\right) \tag{2.7.20}$$

e quindi la nave si fermerà nuovamente quando

$$1 - \frac{2\mu}{M} = \frac{1}{2} \tag{2.7.21}$$

cioè per una massa espulsa

$$\mu = \frac{M}{4}\,. \tag{2.7.22}$$

## Soluzione secondo problema

### Domanda 1

Nel sistema solidale con la calotta, il punto materiale sarà sottoposto alla reazione vincolare

$$\vec{N} = N\left(\hat{y}\cos\theta + \hat{x}\sin\theta\right) \tag{2.7.23}$$

ed a una forza data da

$$\vec{F} = -mg\hat{y} - ma\hat{x} \tag{2.7.24}$$

Si troverà in equilibrio quando reazione vincolare e $\vec{F}$ saranno uguali e opposte, quindi dovrà essere

$$\tan\theta_{eq} = \frac{a}{g} \tag{2.7.25}$$

## Domanda 2

Possiamo sempre ragionare nel sistema solidale con la calotta, considerando la direzione verticale quella nella quale si trova la posizione di equilibrio, e una accelerazione di gravità apparente di modulo $g' = \sqrt{a^2 + g^2}$.

Scriviamo l'energia totale, utilizzando come coordinata $\alpha = \theta - \theta_{eq}$. Avremo

$$E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\alpha}^2 + mg'R\cos\alpha = mg'R \tag{2.7.26}$$

da cui possiamo ricavare

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{2g'}{R}(1 - \cos\alpha) \tag{2.7.27}$$

Consideriamo adesso l'equazione del moto in direzione radiale. Avremo

$$-m\dot{\alpha}^2 R = -mg'\cos\alpha + N \tag{2.7.28}$$

e la condizione per il distacco sarà $N = 0$, cioè

$$\cos\alpha = \frac{2}{3} \tag{2.7.29}$$

Il distacco avverrà quindi per

$$\theta = \theta_{eq} \pm \arccos\frac{2}{3} \tag{2.7.30}$$

## Domanda 3

Nella condizione iniziale il punto materiale accelera insieme alla calotta, quindi sarà

$$F = (M + m)a \tag{2.7.31}$$

al momento del distacco la sola calotta sarà accelerata, quindi

$$F = Ma \tag{2.7.32}$$