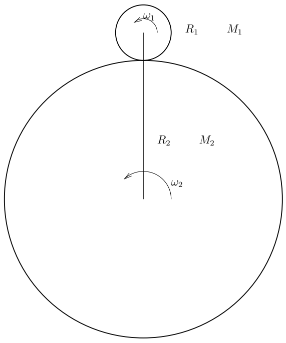
3.4. 23 giugno 2009

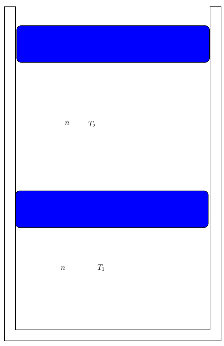
Problema 1 (15 punti)



Un disco di raggio R_1 e massa M_1 rotola senza strisciare su un'altro, di raggio R_2 e massa M_2. Il secondo disco è libero di ruotare attorno al suo centro. La distanza tra i due centri è mantenuta costante da una fune di lunghezza $R_1 + R_2$ come in figura. É presente la gravità.

1. Si osserva che il primo disco rimane alla sommità del secondo. Quale relazione tra le due velocità angolari deve valere perchè questo sia possibile?
2. Inizialmente i due dischi sono in quiete, sempre nella posizione in figura. Con una leggera spinta si mette il primo in movimento. Calcolare la velocità v_1 del suo centro di massa nel momento in cui arriva nella posizione opposta.
3. Calcolare la tensione massima che il filo deve essere in grado di sopportare nella situazione precedente, assumendo di conoscere v_1.

Problema 2 (15 punti)



Il recipiente in figura di sezione S è impermeabile al calore e separato da due setti scorrevoli di massa M, capacità termica e spessore trascurabile. Il setto intermedio ha una resistenza termica R_T, quello in alto è impermeabile al calore. In ciascuno dei due volumi sono presenti n moli di gas perfetto monoatomico, inizialmente alle temperature T_1 e T_2.

1. Calcolare i volumi delle due parti nelle condizioni iniziali.
2. Calcolare le temperature finali (all'equilibrio) dei due gas.
3. Determinare la variazione di entropia rispetto allo stato iniziale in funzione del tempo, assumendo che ciascun gas possa essere considerato istante per istante in equilibrio termodinamico.

Soluzione primo problema

Domanda 1

La velocità relativa dei due dischi nel punto di contatto deve essere la stessa. Ma se il primo disco rimane sulla sommità del primo questo significa

$$-\omega_2 R_2 = \omega_1 R_1 \tag{3.4.1}$$

Domanda 2

Detto θ l'angolo che la retta passante per il centro dei due dischi forma con la verticale abbiamo che la condizione di rotolamento puro si scriverà nel caso generale

$$-\omega_2 R_2 = -(R_1 + R_2)\dot{\theta} + \omega_1 R_1 \tag{3.4.2}$$

inoltre la seconda equazione cardinale applicata ai due dischi da

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 &= FR_1 & (3.4.3)\\ I_2\dot{\omega}_2 &= FR_2 & (3.4.4)\end{aligned}$$

poichè la componente tangenziale della forza che il primo disco esercita sul secondo è uguale e opposta a quella che il secondo esercita sul primo. Quindi

$$R_2 I_1 \dot{\omega}_1 = R_1 I_2 \dot{\omega}_2 \tag{3.4.5}$$

da cui segue che la quantità $R_2 I_1 \omega_1 - R_1 I_2 \omega_2$ sarà conservata. Dato che è inizialmente nulla, sarà $R_2 I_1 \omega_1 = R_1 I_2 \omega_2$.

Infine l'energia totale

$$E = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} M_1 (R_1 + R_2)^2 \dot{\theta}^2 + M_1 g (R_1 + R_2)\cos\theta \tag{3.4.6}$$

sarà conservata. Possiamo scrivere quest'ultima in funzione delle sole θ, $\dot{\theta}$ utilizzando la condizione di rotolamento e la quantità conservata determinata precedentemente,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{I_2 R_1 (R_1 + R_2)}{I_2 R_1^2 + I_1 R_2^2}\dot{\theta} & (3.4.7)\\ \omega_2 &= \frac{I_1 R_2 (R_1 + R_2)}{I_2 R_1^2 + I_1 R_2^2}\dot{\theta} & (3.4.8)\end{aligned}$$

da cui

$$E = \frac{1}{2}\left[\frac{I_1 I_2}{I_2 R_1^2 + I_1 R_2^2} + M_1\right](R_1 + R_2)^2 \dot{\theta}^2 + M_1 g (R_1 + R_2)\cos\theta \tag{3.4.9}$$

ed equagliando il valore iniziale a quello finale otteniamo

$$v_1^2 = (R_1 + R_2)^2 \dot{\theta}^2 = 4 M_1 g \left[\frac{I_1 I_2}{I_2 R_1^2 + I_1 R_2^2} + M_1\right]^{-1} \tag{3.4.10}$$

Sostituendo $I_1 = M_1 R_1^2/2$ e $I_2 = M_2 R_2^2/2$ otteniamo infine

$$v_1^2 = 8g(R_1 + R_2)\frac{M_1 + M_2}{2M_1 + 3M_2} \tag{3.4.11}$$

Domanda 3

Nel punto più basso l'equazione del moto in direzione radiale per il primo disco da

$$M_1 \frac{v_1^2}{(R_1 + R_2)} = T - M_1 g \tag{3.4.12}$$

che permette di ottenere direttamente

$$T = M_1 \frac{v_1^2}{(R_1 + R_2)} + M_1 g \tag{3.4.13}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Per le pressioni nei due scomparti avremo, imponendo l'equilibrio meccanico,

$$P_1 = P_{atm} + \frac{2Mg}{S} \tag{3.4.14}$$

$$P_2 = P_{atm} + \frac{Mg}{S} \tag{3.4.15}$$

e utilizzando l'equazione di stato otteniamo subito

$$V_1 = \frac{nRT_1}{P_1} \tag{3.4.16}$$

$$V_2 = \frac{nRT_2}{P_2} \tag{3.4.17}$$

Domanda 2

Per il primo gas avremo

$$dQ_1 = nc_v dT_1 + P_1 dV_1 \tag{3.4.18}$$

e per il secondo

$$dQ_2 = nc_v dT_2 + P_2 dV_2 \tag{3.4.19}$$

ma dato che non viene scambiato calore con l'esterno $dQ_1 + dQ_2 = 0$, da cui segue che la quantità

$$H = nc_v (T_1 + T_2) + P_1 V_1 + P_2 V_2 \tag{3.4.20}$$

si conserva. Questa si può anche scrivere però

$$H = nc_p (T_1 + T_2) \tag{3.4.21}$$

Confrontandone il valore tra situazione iniziale e finale otteniamo subito

$$T_f = \frac{T_1 + T_2}{2} \tag{3.4.22}$$

Domanda 3

Il calore che fluisce da uno scomparto all'altro per unità di tempo è dato da

$$\frac{dQ_1}{dt} = -\frac{dQ_2}{dt} = \frac{1}{R_T} (T_2 - T_1) \tag{3.4.23}$$

e quindi

$$\frac{dQ_1}{dt} = nc_p \frac{dT_1}{dt} = \frac{1}{R_T} (T_2 - T_1) \tag{3.4.24}$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = nc_p \frac{dT_2}{dt} = \frac{1}{R_T} (T_1 - T_2) \tag{3.4.25}$$

Sommando e sottraendo membro a membro otteniamo due equazioni più semplici da risolvere:

$$\frac{d}{dt} (T_1 + T_2) = 0 \tag{3.4.26}$$

$$\frac{d}{dt} (T_1 - T_2) = -\frac{1}{nc_p R_T} (T_1 - T_2) \tag{3.4.27}$$

da cui

$$T_1 + T_2 = T_{1,0} + T_{2,0} \tag{3.4.28}$$

$$T_1 - T_2 = (T_{1,0} - T_{2,0}) e^{-\frac{t}{nc_p R_T}} \tag{3.4.29}$$

La variazione di entropia del sistema sarà data da

$$\Delta S = nc_p \log \frac{T_1}{T_{1,0}} + nc_p \log \frac{T_2}{T_{2,0}} = nc_p \log \frac{T_1 T_2}{T_{1,0} T_{2,0}} \tag{3.4.30}$$

inoltre

$$T_1 T_2 = \frac{1}{4} \left[T_{1,0} + T_{2,0} + \left(T_{1,0} - T_{2,0} \right) e^{-\frac{t}{nc_p R_T}} \right] \left[T_{1,0} + T_{2,0} - \left(T_{1,0} - T_{2,0} \right) e^{-\frac{t}{nc_p R_T}} \right] \tag{3.4.31}$$

e sostituendo troviamo la legge cercata

$$\begin{aligned} \Delta S = nc_p \log & \frac{\left[T_{1,0} \left(1 + e^{-\frac{t}{nc_p R_T}} \right) + T_{2,0} \left(1 - e^{-\frac{t}{nc_p R_T}} \right) \right]}{2T_{1,0}} \\ + nc_p \log & \frac{\left[T_{1,0} \left(1 - e^{-\frac{t}{nc_p R_T}} \right) + T_{2,0} \left(1 + e^{-\frac{t}{nc_p R_T}} \right) \right]}{2T_{2,0}} \end{aligned}$$