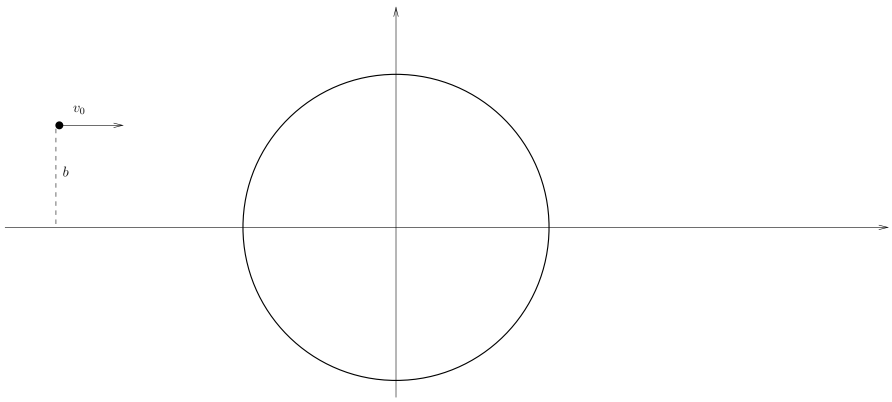
3.5. 13 luglio 2009

Problema 1 (15 punti)



Una particella di massa m si muove con velocità di modulo v_0 nel piano xy, parallelamente all'asse x e a una distanza b da esso. Urta un disco di raggio R e momento di inerzia I_d vincolato a ruotare attorno al proprio centro posto nell'origine del sistema di coordinate e inizialmente fermo. L'interazione tra la particella e il disco si può descrivere dicendo che sulla prima è applicata la forza $\vec{F} = F_0 \vec{v}_r \wedge \hat{z}$ dove $\hat{z}$ è un versore normale al disco e $\vec{v}_r$ la velocità relativa ad esso. Nel seguito può essere utile ricordare l'identità $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

1. Mostrate che l'energia cinetica totale e il momento angolare totale si conservano.

2. Scrivere l'equazione del moto per il disco utilizzando coordinate opportune, e dedurre da essa una terza legge di conservazione.

3. Per quali valori dei parametri b e v_0 la particella può passare dal centro del disco?

Problema 2 (15 punti)

La radiazione elettromagnetica contenuta in un recipiente di volume V può essere trattata come un sistema termodinamico descritto dalle grandezze P, V, T. Sapendo che l'energia interna è data da $U = bVT^4$ e la pressione da $P = \frac{1}{3}\frac{U}{V}$.

1. Rappresentare nel piano $P - V$ un ciclo di Stirling, composto da due isocore e due isoterme, e calcolare il lavoro totale fatto sul sistema.

2. Rappresentare sullo stesso piano una trasformazione adiabatica reversibile.

3. Considerando il recipiente a volume V fissato ed a una temperatura iniziale T, calcolare il massimo lavoro estraibile avendo a disposizione un bagno termico di temperatura $T_0 < T$.

Soluzione primo problema

Domanda 1

L'energia cinetica si conserva perché il lavoro totale fatto dalle forze è nullo. Infatti il lavoro della reazione vincolare è nullo perché applicato ad un punto immobile. Il lavoro fatto sulla particella è

$$dL_1 = F_0 \left(\vec{v}_r \wedge \hat{z}\right) \cdot d\vec{r}_p$$

e quello fatto sul disco da

$$dL_2 = -F_0 \left(\vec{v}_r \wedge \hat{z}\right) \cdot d\vec{r}_d$$

dove $d\vec{r}_p$ e $d\vec{r}_d$ sono gli spostamenti rispettivamente della particella e del punto del disco nel quale si trova. Quindi

$$dL = F_0 \left(\vec{v}_r \wedge \hat{z}\right) \cdot \left(d\vec{r}_p - d\vec{r}_d\right)$$

ma $d\vec{r}_p - d\vec{r}_d$ è lo spostamento relativo, quindi

$$\frac{dL}{dt} = F_0 \left(\vec{v}_r \wedge \hat{z}\right) \cdot \vec{v}_r = 0$$

Il momento angolare totale rispetto ad un polo posto nel vincolo si conserva perché le uniche forze esterne (le reazioni vincolari) hanno momento nullo.

Domanda 2

Indicando con ϕ l'angolo di rotazione del disco abbiamo

$$\begin{aligned} I_d \ddot{\phi} \hat{z} &= -\vec{r}_p \wedge \left(F_0 \vec{v}_r \wedge \hat{z}\right) \\ &= -F_0 \vec{v}_r \left(\vec{r}_p \cdot \hat{z}\right) + F_0 \hat{z} \left(\vec{r}_p \cdot \vec{v}_r\right) \\ &= F_0 \hat{z} \left(\vec{r}_p \cdot \vec{v}_r\right) \end{aligned}$$

D'altra parte la velocità del disco nel punto in cui si trova la particella è data da

$$\vec{v}_d = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_p$$

dove $\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{z}$ è la velocità angolare del disco. Di conseguenza

$$\vec{v}_r = \vec{v}_p - \dot{\phi}\hat{z} \wedge \vec{r}_p$$

Utilizzando coordinate polari per la particella abbiamo

$$\begin{aligned} \vec{v}_r &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} - \dot{\phi} r \left(\hat{z} \wedge \hat{r}\right) \\ &= \dot{r}\hat{r} + r\left(\dot{\theta} - \dot{\phi}\right)\hat{\theta} \end{aligned}$$

e l'equazione del moto diviene

$$\begin{aligned}
I_d\ddot{\phi} &= F_0\left(\vec{r}_p\cdot\vec{v}_r\right)\\
&= F_0 r\dot{r}
\end{aligned}$$

che si può scrivere nella forma

$$\frac{d}{dt}\left(I_d\dot{\phi}-\frac{1}{2}F_0r^2\right)=0$$

La quantità

$$Q = I_d\dot{\phi}-\frac{1}{2}F_0r^2$$

dunque si conserva.

Domanda 3

Scriviamo le tre quantità conservate. Abbiamo

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}I_d\dot{\phi}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)=\frac{1}{2}mv_0^2\\
L &= I_d\dot{\phi}+mr^2\dot{\theta}=-mv_0b\\
Q &= I_d\dot{\phi}-\frac{1}{2}F_0r^2=-\frac{1}{2}F_0R^2
\end{aligned}$$

Possiamo ricavare $\dot{\phi}$ e $\dot{\theta}$ dalle ultime due equazioni

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \frac{L-Q}{mr^2}-\frac{F_0}{2m}=\frac{1}{r^2}\left(\frac{F_0R^2}{2m}-v_0b\right)-\frac{F_0}{2m}\\
\dot{\phi} &= \frac{Q}{I_d}+\frac{F_0}{2I_d}r^2=\frac{F_0}{2I_d}\left(r^2-R^2\right)
\end{aligned}$$

e sostituendo nella prima otteniamo

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2I_d}\left(Q+\frac{F_0}{2}r^2\right)^2+\frac{1}{2m}\left(\frac{L-Q}{r}-\frac{F_0}{2}r\right)^2\\
&= \frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{F_0^2}{8I_d}\left(R^2-r^2\right)^2+\frac{1}{2m}\left[-\frac{mv_0b}{r}+\frac{F_0}{2r}\left(R^2-r^2\right)\right]^2
\end{aligned}$$

Possiamo considerare gli ultimi due termini come un potenziale efficace. Per poter arrivare al centro del disco è necessario anzitutto che i due termini che divergono per $r\to 0$ si cancellino tra loro, e quindi

$$v_0b=\frac{F_0R^2}{2m}$$

Se questa condizione è soddisfatta il potenziale efficace si riduce a

$$U_{eff} = \frac{F_0^2 R^2}{8m}\left[\frac{mR^2}{I_d}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^2 + \frac{r^2}{R^2}\right]$$

e quindi deve essere

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{F_0^2 R^4}{8I_d} > 0$$

ossia

$$v_0 > \frac{F_0 R^2}{4\sqrt{mI_d}}$$

Notare che nel caso considerato

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\frac{v_0 b}{R^2}\\ \dot{\phi} &= \frac{mv_0 b}{I_d}\left(\frac{r^2}{R^2}-1\right)\end{aligned}$$

cioè la velocità angolare della particella si mantiene costante.

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Domanda 2

Domanda 3