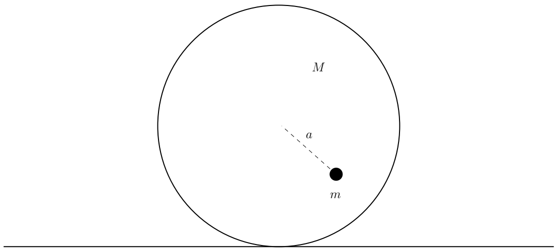
3.6. 17 settembre 2009

Problema 1 (15 punti)



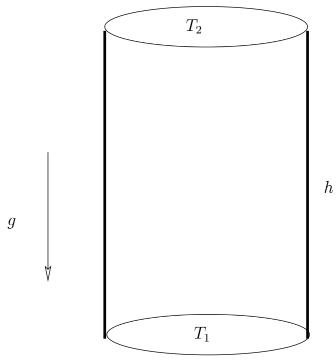
All'interno di un disco di massa M e raggio R, ad una distanza $a < R$ dal centro, viene fissato un punto materiale di massa m. Il corpo rotola senza strisciare su un piano orizzontale.

1. Determinare la posizione del centro di massa e il momento di inerzia rispetto ad un asse passante per esso e normale al disco.

2. Se il punto materiale si trova a $t = 0$ nella posizione più bassa, determinare la minima velocità angolare iniziale per la quale è possibile un giro completo.

3. Scrivere l'equazione del moto e trovarne la soluzione nel caso $m \ll M$.

Problema 2 (15 punti)



Un cilindro di sezione S e altezza h ha le pareti laterali impermeabili al calore, mentre le due estremità sono mantenute a temperatura costante. All'interno del cilindro si trovano n moli di un gas perfetto, di massa molare μ e conducibilità termica σ che si suppone costante. Si deve tenere conto della gravità.

1. Supponendo che la temperatura dell'estremità inferiore sia T_1 e quella dell'estremità superiore $T_2 > T_1$ calcolare la pressione del gas in funzione dell'altezza in condizioni stazionarie.

2. Sempre in condizioni stazionarie calcolare quanta entropia viene prodotta per unità di tempo.

3. Si porta la temperatura dell'estremità superiore a T_1 e si attende che si stabilisca l'equilibrio. Calcolare di quanto è variata l'entropia del gas.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Per motivi di simmetria il centro di massa sarà sul diametro del disco passante per il punto materiale. Ponendo un sistema di riferimento con origine nel centro del disco e punto materiale in $(a, 0)$ troviamo

$$x_{CM} = \frac{0 \times M + a \times m}{M + m} = \frac{m}{M+m} a \equiv d \tag{3.6.1}$$

Per quanto riguarda il momento di inerzia, possiamo usare il teorema di Steiner per calcolare il contributo del disco,

$$I_{disco} = I_{disco}^{CM} + M x_{CM}^2 = \frac{1}{2} M R^2 + \frac{M m^2}{(M+m)^2} a^2 \tag{3.6.2}$$

(abbiamo indicato con I_{disco}^{CM} il momento di inerzia del disco rispetto al proprio centro di massa) e quindi aggiungere il contributo del punto materiale

$$\begin{aligned} I &= I_{disco} + m\left(a - x_{CM}\right)^2 = \frac{1}{2} M R^2 + \frac{M m^2}{(M+m)^2} a^2 + \frac{m M^2}{(M+m)^2} a^2 = \frac{1}{2} M R^2 + \frac{M m}{M+m} a^2 && (3.6.3) \\ &= \frac{1}{2} M R^2 + M a d && (3.6.4) \end{aligned}$$

Domanda 2

Possiamo scrivere l'energia totale (che si conserva) nella forma

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (M+m) v_{CM}^2 - m g a \cos\theta \tag{3.6.5}$$

dove θ è l'angolo che il diametro del disco passante per il punto materiale forma con la verticale. Per la velocità del centro di massa abbiamo, tenuto conto della condizione di puro rotolamento,

$$\begin{aligned} V_{CM,x} &= -R\dot{\theta} + d\dot{\theta}\cos\theta && (3.6.6) \\ V_{CM,y} &= d\dot{\theta}\sin\theta && (3.6.7) \end{aligned}$$

e quindi

$$E = \frac{1}{2}\left[I + (M+m)\left(R^2 + d^2 - 2Rd\cos\theta\right)\right]\dot{\theta}^2 - m g a \cos\theta \tag{3.6.8}$$

Eguagliando l'energia iniziale (punto materiale nella posizione più bassa, velocità angolare incognita) a quella finale (punto materiale nella posizione più alta, velocità angolare nulla nel caso limite cui siamo interessati) abbiamo

$$\frac{1}{2}\left[I+(M+m)\left(R^2+d^2-2Rd\right)\right]\omega_{0,MIN}^2-mga=mga \tag{3.6.9}$$

e quindi

$$\omega_{0,MIN}=\sqrt{\frac{4mga}{\left[I+(M+m)\left(R^2-d\right)^2\right]}} \tag{3.6.10}$$

Domanda 3

L'equazione del moto si ottiene rapidamente derivando l'energia determinata al punto precedente:

$$\dot{E}=\left[I+(M+m)\left(R^2+d^2-2Rd\cos\theta\right)\right]\dot{\theta}\ddot{\theta}+(M+m)\,Rd\sin\theta\dot{\theta}^3+md\dot{\theta}\sin\theta=0 \tag{3.6.11}$$

da cui

$$\left[I+(M+m)\left(R^2+d^2-2Rd\cos\theta\right)\right]\ddot{\theta}+(M+m)\,Rd\dot{\theta}^2\sin\theta+md\sin\theta=0 \tag{3.6.12}$$

Cerchiamo la soluzione nella forma $\theta=\theta_0+\theta_1+O(m^2/M^2)$ dove θ_0 è la soluzione per $m/M=0$ e θ_1 una piccola correzione. Sostituendo nell'equazione differenziale e eguagliando i termini dello stesso ordine otteniamo

$$\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta}_0=0 \tag{3.6.13}$$

$$\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta}_1+\left[Mad+mR^2-2MRd\cos\theta_0\right]\ddot{\theta}_0+MRd\dot{\theta}_0^2\sin\theta_0=0 \tag{3.6.14}$$

La soluzione generale della prima equazione è

$$\theta_0=\omega_0 t+\phi_0 \tag{3.6.15}$$

che sostituito nella seconda da

$$\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta}_1+MRd\omega_0^2\sin\left(\omega_0 t+\phi_0\right)=0 \tag{3.6.16}$$

Questa equazione si integra direttamente

$$\theta_1=\frac{2d}{3R}\sin\left(\omega_0 t+\phi_0\right) \tag{3.6.17}$$

ottenendo

$$\theta(t) = \omega_0 t + \phi_0 + \frac{2d}{3R}\sin(\omega_0 t + \phi_0) + O\left(\frac{m^2}{M^2}\right) \tag{3.6.18}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che la sezione è costante allo stato stazionario la densità di corrente di calore è indipendente dall'altezza, e data da

$$J = -\sigma\frac{\partial T}{\partial z} \tag{3.6.19}$$

che si integra direttamente fornendo

$$T = A - \frac{J}{\sigma}z \tag{3.6.20}$$

Le costanti J e A si ottengono imponendo le condizioni al contorno, abbiamo quindi la ben nota dipendenza lineare della temperatura dalla posizione:

$$T = T_1 + \frac{z}{h}(T_2 - T_1) = T_1(1 + kz) \tag{3.6.21}$$

dove k è dato da:

$$k = \frac{1}{T_1}\frac{T_2 - T_1}{h} = \frac{r-1}{h} \tag{3.6.22}$$

dove si è posto $r = T_2/T_1$ pre brevità.

Per quanto riguarda la pressione abbiamo anzitutto

$$dP = -\rho g dz \tag{3.6.23}$$

dove ρ è la densità di massa del gas, che possiamo scrivere come

$$\rho = \mu\frac{n}{V} = \frac{\mu P}{RT} \tag{3.6.24}$$

e sostituendo nell'equazione precedente otteniamo

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\mu g P}{RT} = -\frac{\mu g P}{RT_1[1 + kz]} \tag{3.6.25}$$

Questa equazione differenziale è separabile, e possiamo integrarla direttamente

$$\int_{P(0)}^{P(z)}\frac{dP}{P} = -\int_0^z\frac{\mu g dz}{RT_1[1 + kz]} \tag{3.6.26}$$

ottenendo

$$\log \frac{P(z)}{P(0)} = -\frac{\mu g h}{R T_1} \int_0^{z/h} \frac{dx}{1 + \frac{T_2 - T_1}{T_1} x} = -\frac{\mu g h}{R\left(T_2 - T_1\right)} \log\left(1 + k z\right) \tag{3.6.27}$$

ossia

$$P(z) = \frac{P(0)}{(1 + kz)^\alpha} = \frac{P(0)}{(T/T_1)^\alpha} \tag{3.6.28}$$

con

$$\alpha = \frac{\mu g h}{R(T_2 - T_1)} = \frac{\mu g h}{R T_1 (r - 1)} \tag{3.6.29}$$

Per determinare la costante $P(0)$ scriviamo la densità molare

$$\rho_m = \frac{P}{RT} = \frac{P(0)}{R T_1 \left(1 + kz\right)^{\alpha+1}} \tag{3.6.30}$$

che integrata su tutto il volume deve dare il numero di moli totali

$$n = \int_0^h S \rho_m dz = \int_0^h \frac{S P(0)}{RT\left(T/T_1\right)^\alpha} dz \tag{3.6.31}$$

Utilizzando $x = T/T_1$ come variabile di integrazione abbiamo (ponendo $r = T_2/T_1$ per brevità)

$$n = \frac{S P(0)}{R k T_1} \int_1^r \frac{1}{x^{\alpha+1}} dx = \frac{S P(0)}{R k T_1} \frac{r^\alpha - 1}{\alpha r^\alpha} \tag{3.6.32}$$

e quindi

$$P(0) = \frac{n \alpha r^\alpha}{r^\alpha - 1} \frac{R k T_1}{S} \tag{3.6.33}$$

Domanda 2

Dato che lo stato del gas non cambia, la produzione di entropia per unità di tempo sarà data dal contributo dei due bagni termici:

$$d\mathcal{S} = -\frac{dQ}{T_2} + \frac{dQ}{T_1} \tag{3.6.34}$$

Qui dQ è il calore ceduto alla sorgente più fredda, che allo stato stazionario deve essere identico a quello assorbito dalla sorgente calda. In una unità di tempo abbiamo

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) \frac{dQ}{dt} = -\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) J S \tag{3.6.35}$$

e sostituendo la densità di corrente di calore abbiamo

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \frac{S\sigma}{h} \frac{\left(T_2 - T_1\right)^2}{T_1 T_2} > 0 \tag{3.6.36}$$

Domanda 3

Dato che l'entropia è una funzione di stato, è sufficiente calcolare la differenza tra lo stato iniziale e quello finale. Considerando uno strato del cilindro contenente dn moli del gas perfetto, la sua entropia sarà, a meno di una costante,

$$d\mathcal{S} = (c_p \log T - R \log P)\, dn \tag{3.6.37}$$

e integrando su tutto il volume otteniamo (tenendo conto che $dn/dV = \rho_m$)

$$\mathcal{S} = \int_0^h (c_p \log T - R \log P) \frac{PS}{RT} dz \tag{3.6.38}$$

Inserendo le espressioni esplicite per T e P otteniamo

$$\mathcal{S} = \frac{P(0)S}{RT_1} \int_0^h \left(c_p \log T - R \log \frac{P(0)}{(T/T_1)^\alpha} \right) \frac{dz}{(T/T_1)^{\alpha+1}} \tag{3.6.39}$$

Usando $s = T/T_1$ come variabile di integrazione abbiamo

$$\mathcal{S} = \frac{P(0)S}{RkT_1} \int_1^r \left[(c_p + R\alpha) \log s + c_p \log T_1 - R \log P(0) \right] \frac{ds}{s^{\alpha+1}} \tag{3.6.40}$$

da cui

$$\mathcal{S}(r) = \frac{P(0)S}{RT_1} \left\{ \frac{(c_p + R\alpha + \alpha c_p \log T_1 - \alpha R \log P(0)) (r^\alpha - 1) - \alpha (c_p + R\alpha) \log r}{k\alpha^2 r^\alpha} \right\} \tag{3.6.41}$$

e (notare che α, k e $P(0)$ dipendono da r)

$$\Delta\mathcal{S} = S(r) - S(1) \tag{3.6.42}$$