4.10. 18 dicembre 2015

Problema 1

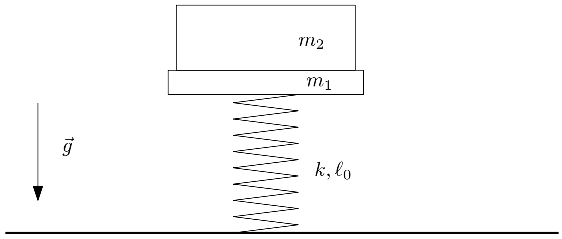

Figura 4.3.: La molla e le due masse considerate nel problema.

Una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo ℓ_0 è fissata a terra ad un estremo e a una massa m_1 all'altro. Sopra m_1 è appoggiata un'altra massa m_2, come in Figura 4.3. Supponendo che $\ell_0 = 16\,(m_1 + m_2)\,g/k$

1. Trovare la lunghezza della molla nella condizione di equilibrio.
2. Applicando una opportuna forza esterna si porta la lunghezza della molla a $(m_1 + m_2)\,g/k$ e quindi la si lascia libera. Dire se la massa m_2 si distacca ad un certo momento dalla massa m_1, giustificando la risposta.
3. Se la risposta alla domanda precedente è positiva dire quanto vale la lunghezza della molla al momento del distacco, e dopo quanto tempo dal momento del rilascio questa avviene.

Problema 2

In un cilindro di raggio R è praticato un foro che lo attraversa lungo un diametro, orizzontalmente. Il foro permette il passaggio di una particella di massa m, che scorre all'interno di esso senza attriti. Il cilindro viene fatto ruotare attorno al suo asse con velocità angolare costante ω, e la rotazione è sincronizzata con l'arrivo della particella che riesce ad entrare nel foro con velocità v_0 e scorre in esso.

1. Per quale valore minimo v_{min} del modulo v_0 della velocità di entrata la particella attraversa tutto il foro uscendo dalla parte opposta?
2. Calcolare il lavoro totale fatto dal disco sulla particella quando quest'ultima è uscita.
3. Supponendo $v_0 > v_{min}$, trovare il valore di v_0 per il quale la particella esce dal foro quando il cilindro ha compiuto una rotazione di $\pi/2$?

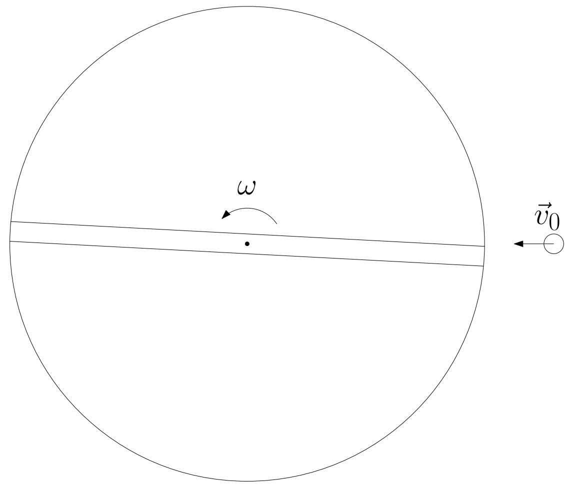

Figura 4.4.: Il disco con il foro considerato nel problema

Soluzione primo problema

Domanda 1

Scriviamo l'equazione del moto. Detta $y$la lunghezza della molla abbiamo

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{y} = -k\,(y - \ell_0) - (m_1 + m_2)\,g$$

Dato che all'equilibrio $\ddot{y} = 0$ otteniamo

$$\begin{aligned} y &= \ell_0 - \frac{(m_1 + m_2)\,g}{k} \\ &= 15\frac{(m_1 + m_2)\,g}{k} \end{aligned}$$

Domanda 2

Mentre le due masse sono in contatto abbiamo

$$\begin{aligned} m_1\ddot{y} &= -k\,(y - \ell_0) - m_1 g - N \\ m_2\ddot{y} &= -m_2 g + N \end{aligned}$$

dove N è la forza di contatto che la massa m_1 esercita sulla massa m_2. Dividendo ciascuna equazione per la rispettiva massa e sottraendo membro a membro otteniamo

$$0 = -\frac{k}{m_1}\,(y - \ell_0) - \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) N$$

ossia

$$N = -k\frac{m_2}{m_1+m_2}\left(y-\ell_0\right)$$

che diviene negativa per $y > \ell_0$. Al momento del rilascio $y_i = (m_1+m_2)g/k$, e il valore massimo di y_f raggiungibile si ottiene dalla conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2}\left[y_i-\ell_0\right]^2 + \left(m_1+m_2\right)gy_i &= \frac{k}{2}\left[y_f-\ell_0\right]^2 + \left(m_1+m_2\right)gy_f \\
\frac{k}{2}\left\{\left[y_i-\ell_0\right]^2 - \left[y_f-\ell_0\right]^2\right\} &= \left(m_1+m_2\right)g\left(y_f-y_i\right) \\
\frac{k}{2}\left(y_i-y_f\right)\left(y_i+y_f-2\ell_0\right) &= \left(m_1+m_2\right)g\left(y_f-y_i\right)
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\left(y_i+y_f-2\ell_0\right) &= -\frac{2\left(m_1+m_2\right)g}{k} \\
y_f &= 2\ell_0 - y_i - \frac{2\left(m_1+m_2\right)g}{k} \\
&= \frac{29\left(m_1+m_2\right)g}{k}
\end{aligned}$$

Chiaramente prima di arrivare a y_f la massa superiore si staccherà dato che $y_f > \ell_0$

Domanda 3

Come abbiamo appena visto, il distacco avverrà quando la lunghezza della molla è quella a riposo ℓ_0. Fino al momento del distacco della massa m_2 il sistema è un oscillatore armonico di frequenza angolare

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$$

compie oscillazioni di ampiezza

$$\frac{15\left(m_1+m_2\right)g}{k} - \frac{\left(m_1+m_2\right)g}{k} = \frac{14\left(m_1+m_2\right)g}{k}$$

attorno alla posizione di equilibrio. Di conseguenza

$$y(t) = \frac{15\left(m_1+m_2\right)g}{k} - \frac{14\left(m_1+m_2\right)g}{k}\cos\omega t$$

La posizione di distacco verrà raggiunta al tempo determinato dall'equazione

$$\frac{15\left(m_1+m_2\right)g}{k} - \frac{14\left(m_1+m_2\right)g}{k}\cos\omega t = \frac{16\left(m_1+m_2\right)g}{k}$$

cioè per

$$t = \frac{1}{\omega} \arccos\left(-\frac{1}{14}\right)$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

In un sistema di riferimento solidale al disco, scegliendo l'asse x nella direzione del foro, abbiamo l'equazione del moto lungo tale direzione

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x$$

dove $m\omega^2 x$ è la forza centrifuga. La soluzione generale è

$$x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

Per le condizioni al contorno abbiamo

$$\begin{aligned} x(0) &= A + B = R \\ \dot{x}(0) &= \omega A - \omega B = -v_0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left(R - \frac{v_0}{\omega}\right) \\ B &= \frac{1}{2}\left(R + \frac{v_0}{\omega}\right) \end{aligned}$$

da cui

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(R - \frac{v_0}{\omega}\right)e^{\omega t} + \frac{1}{2}\left(R + \frac{v_0}{\omega}\right)e^{-\omega t}$$

Se la particella esce dalla parte opposta a quella di entrata deve esistere una soluzione dell'equazione

$$-R = \frac{1}{2}\left(R - \frac{v_0}{\omega}\right)e^{\omega t} + \frac{1}{2}\left(R + \frac{v_0}{\omega}\right)e^{-\omega t}$$

ossia

$$\left(R - \frac{v_0}{\omega}\right)e^{2\omega t} + 2Re^{\omega t} + \left(R + \frac{v_0}{\omega}\right) = 0$$

Questa è una equazione di secondo grado in $e^{\omega t}$, che ha per risultato

$$e^{\omega t} = -\frac{R\omega \pm v_0}{R\omega - v_0}$$

L'unica soluzione accettabile è

$$e^{\omega t} = \frac{v_0 + R\omega}{v_0 - R\omega}$$

per $v_0 > R\omega$. Quindi $v_{min} = R\omega$.

Domanda 2,

Se l'uscita avviene dal lato opposto dell'ingresso la componente della velocità nella direzione del foro è identica a quella di entrata. Infatti ponendo $e^{\omega t} = (v_0 + R\omega)/(v_0 - R\omega)$ troviamo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{2}(R\omega - v_0)\frac{v_0 + R\omega}{v_0 - R\omega} - \frac{1}{2}(R\omega + v_0)\frac{v_0 - R\omega}{v_0 + R\omega} \\ &= -\frac{1}{2}(R\omega + v_0) - \frac{1}{2}(v_0 - R\omega) = -v_0\end{aligned}$$

Se invece l'uscita avviene dalla stessa estremità di entrata abbiamo

$$R = \frac{1}{2}\left(R - \frac{v_0}{\omega}\right)e^{\omega t} + \frac{1}{2}\left(R + \frac{v_0}{\omega}\right)e^{-\omega t}$$

e quindi

$$\left(R - \frac{v_0}{\omega}\right)e^{2\omega t} - 2Re^{\omega t} + \left(R + \frac{v_0}{\omega}\right) = 0$$

cioè

$$e^{\omega t} = \frac{R \pm \frac{v_0}{\omega}}{R - \frac{v_0}{\omega}}$$

La soluzione che corrisponde all'uscita è

$$e^{\omega t} = \frac{R\omega + v_0}{R\omega - v_0}$$

da cui

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{2}(R\omega - v_0)\frac{R\omega + v_0}{R\omega - v_0} - \frac{1}{2}(R\omega + v_0)\frac{R\omega - v_0}{R\omega + v_0} \\ &= v_0\end{aligned}$$

cioè in questo caso la velocità di uscita è opposta a quella di entrata. In entrambi i casi la particella in uscita ha però anche una componente della velocità perpendicolare al foro uguale a ωR. La variazione di energia cinetica tra ingresso e uscita è dunque

$$\Delta E = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 + \omega^2 R^2\right) - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 R^2$$

che sarà uguale al lavoro fatto sulla particella dal disco.

Domanda 3

Abbiamo già calcolato il tempo di uscita

$$t = \frac{1}{\omega}\log\left(\frac{v_0 + R\omega}{v_0 - R\omega}\right)$$

Questo deve essere uguale a un quarto del periodo di rotazione, quindi

$$\frac{\pi}{2\omega} = \frac{1}{\omega}\log\left(\frac{v_0 + R\omega}{v_0 - R\omega}\right)$$

Risolvendo troviamo

$$v_0 = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{e^{\frac{\pi}{2}} - 1} R\omega \simeq 1.52\, R\omega$$