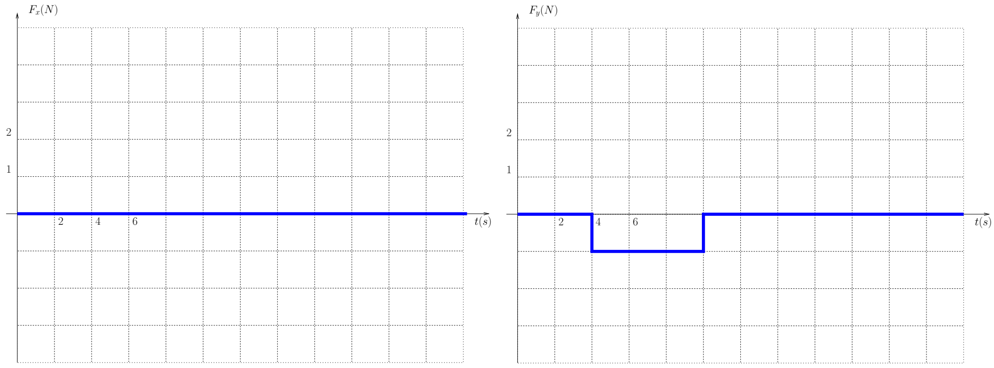
4.1. 8 novembre 2006

Problema 1 (15 punti)



Un punto materiale di massa $m = 1$ kg si muove in un piano, sotto l'azione di una forza le cui componenti lungo due direzioni ortogonali hanno l'andamento riportato in figura.

1. Inizialmente la velocità ha componenti $v_x^{(0)} = 6$ m/s e $v_y^{(0)} = 8$ m/s. Tracciare il grafico delle componenti della velocità in funzione del tempo.

2. Per le suddette condizioni iniziali, determinare la traiettoria.

3. Fissato ora il modulo v della velocità iniziale, detto α l'angolo che la traiettoria forma con la direzione y, determinare $\alpha(t = 14\,s)$ in funzione di $\alpha(t = 0\,s)$.

Problema 2 (15 punti)

Un punto materiale di massa m si muove in un piano secondo la legge oraria, espressa in coordinate cartesiane,

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$
$$y(t) = B\sin(\omega t)$$

1. Determinare la traiettoria del moto

2. Determinare la forza $\vec{F}$ agente sul punto, ed esprimerla in funzione della posizione del punto

3. Determinare per quali valori dei parametri A, B e ϕ si ha $|\vec{v}| =$ costante.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Non ci sono forze in direzione x, per cui il moto è sempre uniforme:

$$v_x = v_x^{(0)}\,.$$

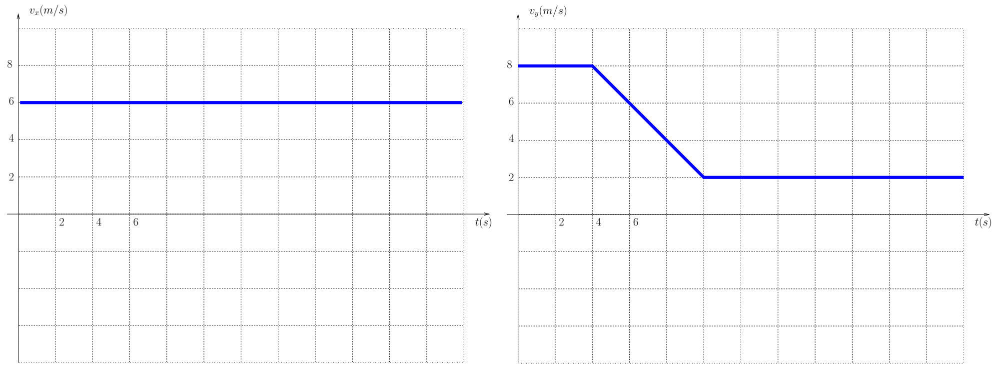
Lungo la direzione y si ha una forza costante tra $t = t_1 = 4$ e $t = t_2 = 6$. Possiamo scrivere quindi

$$
\begin{aligned}
v_y(t) &= v_y^{(0)} \qquad t < t_1 \\
v_y(t) &= v_y^{(0)} + \frac{F_y}{m}(t - t_1) \qquad t_1 < t < t_2 \\
v_y(t) &= v_y^{(0)} + \frac{F_y}{m}(t_2 - t_1) \qquad t > t_2 \,.
\end{aligned}
$$

Numericamente questo significa

$$
\begin{aligned}
v_y(t) &= 8 \qquad t < 4 \\
v_y(t) &= 12 - t \qquad 4 < t < 10 \\
v_y(t) &= 2 \qquad t > 10 \,.
\end{aligned}
$$

Il tutto è rappresentato nella figura che segue.



Domanda 2

Possiamo scrivere $x = 6t$ e

$$
\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v_y}{v_x}
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}(x) &= \frac{4}{3} \qquad x < 24 \\
\frac{dy}{dx}(x) &= 2 - \frac{x}{36} \qquad 24 < x < 60 \\
\frac{dy}{dx}(x) &= \frac{1}{3} \qquad x > 60
\end{aligned}
$$

e integrando abbiamo

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{4}{3}x \qquad x < 24 \\
y(x) &= 2x - \frac{x^2}{72} + c_1 \qquad 24 < x < 60 \\
y(x) &= \frac{x}{3} + c_2 \qquad x > 60\,.
\end{aligned}
$$

Le costanti c_i si determinano imponendo la continuità della traiettoria:

$$\frac{4}{3} \times 24 = 2 \times 24 - \frac{1}{72}(24)^2 + c_1$$

$$2 \times 60 - \frac{1}{72}(60)^2 + c_1 = \frac{1}{3} \times 60 + c_2$$

da cui $c_1 = -8$ e $c_2 = 42$. La traiettoria è rappresentata nella figura che segue.

Domanda 3

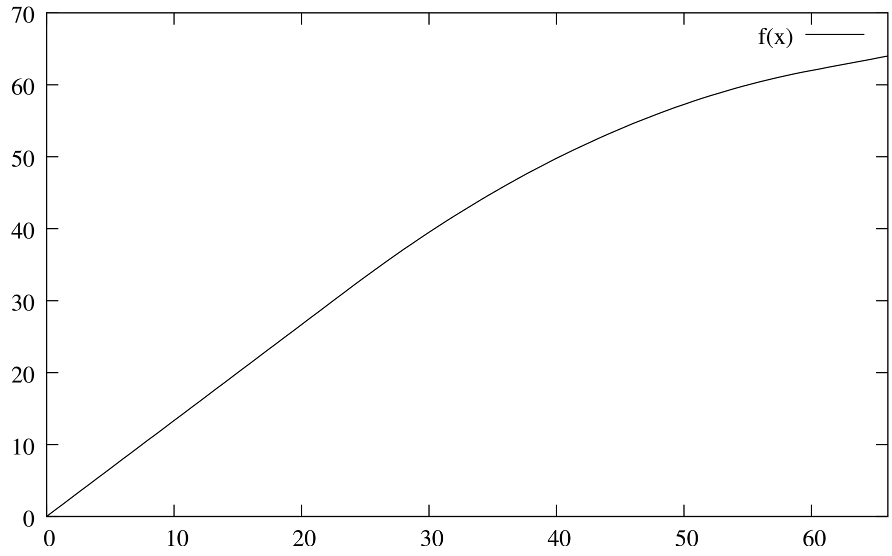
Ripetendo i calcoli iniziali abbiamo per $t > 10$

$$
\begin{aligned}
v_x(t) &= v \sin\alpha \\
v_y(t) &= v \cos\alpha + \frac{F_y}{m}(t_2 - t_1)
\end{aligned}
$$

da cui

$$\tan\alpha' = \frac{v_x(14)}{v_y(14)} = \frac{v \sin\alpha}{v \cos\alpha + \frac{F_y}{m}(t_2 - t_1)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \frac{F_y}{mv}(t_2 - t_1)}\,.$$

La traiettoria è quindi un arco di parabola in $24 < x < 60$ e una retta altrove, rappresentata nella figura che segue.



Rette e parabole si raccordano con continuità e con derivata continua.

Soluzione secondo problema

Domanda 1.

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} x &= A\cos\omega t\cos\phi - A\sin\omega t\sin\phi \\ y &= B\sin\omega t \end{aligned}$$

e sostituendo la seconda equazione nella prima

$$\begin{aligned} \frac{x}{A\cos\phi} + \tfrac{y}{B\cos\phi}\sin\phi &= \cos\omega t \\ \frac{y}{B} &= \sin\omega t \end{aligned}$$

e sommando i quadrati di ambo i membri

$$\frac{y^2}{B^2} + \left(\frac{x}{A\cos\phi} + \frac{y}{B}\tan\phi\right)^2 = 1\,.$$

Questa è un'ellisse con centro nell'origine, in generale con gli assi ruotati.

Domanda 2

Derivando due volte rispetto al tempo abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{F_x}{m} = \ddot{x} &= -A\omega^2\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x \\ \frac{F_y}{m} = \ddot{y} &= -B\omega^2\sin(\omega t) = -\omega^2 y\,.\end{aligned}$$

Questo si può anche scrivere nella forma

$$\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}\,.$$

Domanda 3

Possiamo scrivere

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \omega^2\left[A^2\sin^2(\omega t+\phi) + B^2\cos^2(\omega t)\right]$$

che non dipende dal tempo se

$$\frac{d}{dt}v^2 = \omega^3\left[2A^2\sin(\omega t+\phi)\cos(\omega t+\phi) - 2B^2\cos(\omega t)\sin(\omega t)\right] = 0\,.$$

Questo significa

$$A^2\sin(2\omega t + 2\phi) = B^2\sin(2\omega t)$$

e una condizione necessaria è che $A^2 = B^2$, cioè $A = \pm B$. Se $A = B = 0$ abbiamo una soluzione banale (particella ferma nell'origine). Se $A = \pm B \neq 0$ deve essere

$$2\phi = 2k\pi$$

ossia $\phi = k\pi$. Possiamo riassumere tutte le soluzioni nelle condizioni

$$\begin{aligned}A &= \pm B \\ \phi &= 0\,.\end{aligned}$$

In questo caso abbiamo delle circonferenze (di raggio A).