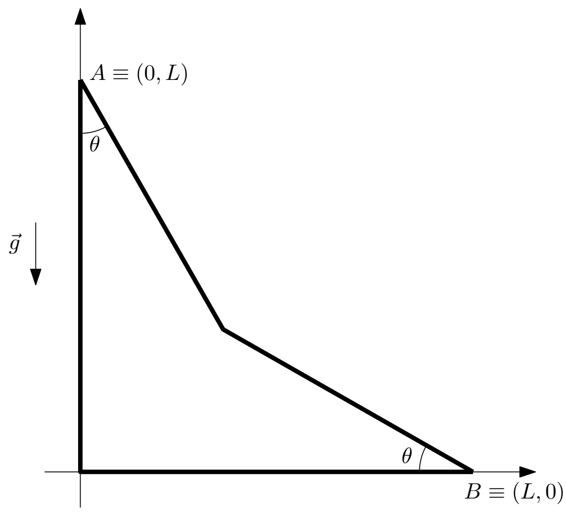
## 4.5. 9 novembre 2011

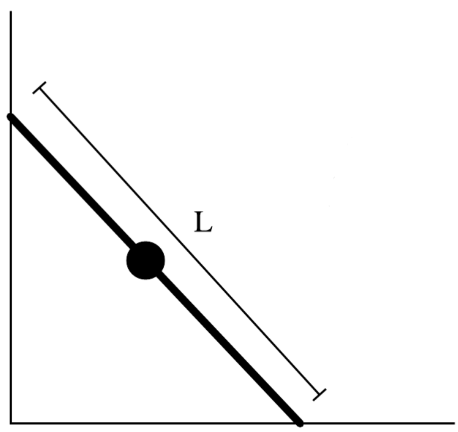
### Problema 1 (15 punti)




Un corpo di massa $m$ inizialmente immobile viene lasciato libero di cadere sul doppio piano inclinato rappresentato in figura partendo dal punto $A$, in assenza di attrito. La giunzione tra le parti di piano con diversa pendenza è opportunamente arrotondata, in modo che la velocità del corpo si conservi in modulo attraversandola.

1. Calcolare l'accelerazione della massa sulle due parti del piano.
2. Determinare la velocità della particella in funzione del tempo per $0 < \theta < \pi/2$.
3. Calcolare la velocità della massa nel punto $B$ in funzione di $\theta$.

### Problema 2 (15 punti)



Una sbarra rigida di lunghezza $L$ e massa trascurabile è vincolata a muoversi mantenendo gli estremi fissi su due guide perpendicolari tra loro. Al centro della sbarra è fissato rigidamente un corpo puntiforme di massa $m$. La sbarra è inizialmente in posizione verticale.

1. Descrivere la traiettoria percorsa dal corpo quando la sbarra si muove dalla posizione iniziale verticale a quella orizzontale: che tipo di curva è? (Suggerimento: calcolare la lunghezza della sbarra in funzione delle coordinate del corpo).

2. Assumendo che l'estremo della sbarra vincolato sulla guida orizzontale si muova a velocità costante $v_0$, calcolare il modulo quadro della velocità del corpo in funzione del tempo.

3. Nelle stesse condizioni della domanda precedente, calcolare le componenti tangenti e normali alla traiettoria della forza totale che agisce sul corpo.

## Soluzione primo problema

### Domanda 1

Il moto su ciascuna delle due parti del piano è uniformenente accelerato, come su un piano inclinato semplice, e le accelerazioni valgono

$$\begin{aligned} a_+ &= g\cos\theta \\ a_- &= g\sin\theta \end{aligned}$$

### Domanda 2

e la lunghezza di entrambe le parti è data da

$$\ell = \frac{L}{\sin\theta + \cos\theta}$$

Inizialmente abbiamo

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}gt^2\cos\theta \\ v &= gt\cos\theta \end{aligned}$$

valida fino al tempo

$$t_1 = \sqrt{\frac{2\ell}{g\cos\theta}}$$

Successivamente abbiamo

$$\begin{aligned} s &= \ell + gt_1\cos\theta\,(t-t_1) + \frac{1}{2}g\,(t-t_1)^2\sin\theta \\ v &= gt_1\cos\theta + g\,(t-t_1)\sin\theta \end{aligned}$$

valida fino al tempo $t_2$ nel quale

$$s = 2\ell$$

cioè

$$(t_2 - t_1)^2 + 2t_1 \cot\theta\,(t_2 - t_1) - \frac{2\ell}{g\sin\theta} = 0$$

ossia

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= -t_1 \cot\theta + \sqrt{t_1^2 \cot^2\theta + \frac{2\ell}{g\sin\theta}} \\ &= -t_1 \cot\theta + \sqrt{\frac{2\ell}{g\sin\theta}\left(\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta}\right)} \end{aligned}$$

In conclusione

$$v(t) = \begin{cases} gt\cos\theta & \text{per } 0 < t < t_1 \\ gt_1\cos\theta + g\,(t - t_1)\sin\theta & \text{per } t_1 < t < t_2 \end{cases}$$

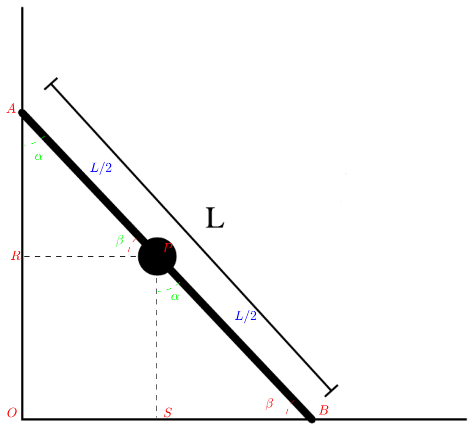
### Domanda 3

Abbiamo

$$\begin{aligned} v_B &= v(t_2) = gt_1\cos\theta + g\,(t_2 - t_1)\sin\theta \\ &= gt_1\cos\theta + g\sin\theta\left[-t_1\cot\theta + \sqrt{\frac{2\ell}{g\sin\theta}\left(\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta}\right)}\right] \\ &= \sqrt{2g\ell\,(\cos\theta + \sin\theta)} = \sqrt{2gL} \end{aligned}$$

## Soluzione secondo problema

### Domanda 1



Dalla figura segue che i triangoli $ARP$ e $PSB$ sono uguali, dette $x$,$y$ le coordinate del corpo rispetto ad un sistema di assi coincidente con le pareti deve quindi essere

$$(2x)^2 + (2y)^2 = L^2$$

e quindi la traiettoria è il quarto di circonferenza di lato $L/2$ con centro nell'origine che si trova nel primo quadrante.

### Domanda 2

Dato che

$$2x = v_0 t$$

e che

$$y = \sqrt{\frac{L^2}{4} - x^2}$$

abbiamo

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \\ &= \dot{x}^2 \left[ 1 + \frac{x^2}{\frac{L^2}{4} - x^2} \right] \\ &= \frac{v_0^2}{4} \frac{L^2}{L^2 - v_0^2 t^2} \end{aligned}$$

Il moto del corpo e la sua traiettoria sono rappresentati nella animazione `http://www.df.unipi.it/~cella/videos/provescritte/caduta.html`.

### Domanda 3

Dato che il moto è circolare, l'accelerazione normale sarà

$$a_n = -2\frac{v^2}{L}$$

e quella tangenziale

$$a_t = \dot{v}$$

Derivando il modulo di $v$ calcolato al punto precedente abbiamo

$$a_t = \frac{t}{2L^2} \left( \frac{L^2 v_0^2}{L^2 - v_0^2 t^2} \right)^{3/2}$$

Moltiplicando per la massa abbiamo le forze totali:

$$\begin{aligned}
F_t &= \frac{mt}{2L^2}\left(\frac{L^2 v_0^2}{L^2 - v_0^2 t^2}\right)^{3/2} \\
F_n &= -2m\frac{v^2}{L}
\end{aligned}$$