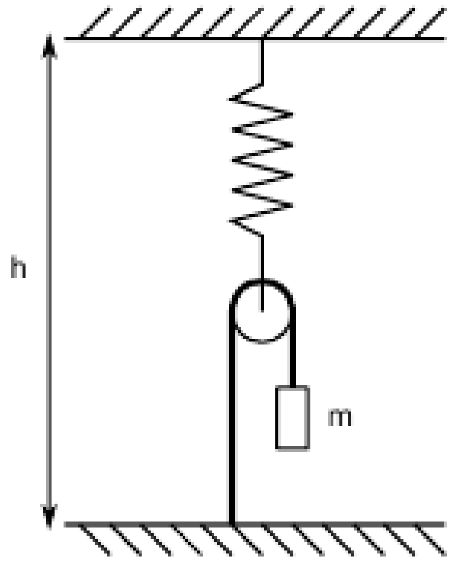
4.6. 5 dicembre 2012

Problema 1 (15 punti)



Un corpo di massa m è appeso con una fune inestensibile di lunghezza $\frac{3}{4}h$ e di massa nulla ad una carrucola anch'essa di massa nulla, come in figura. La carrucola è attaccata attraverso una molla con lunghezza a riposo $\frac{1}{4}h$ e costante elastica k al soffitto, che si trova ad una distanza h dal pavimento. Il raggio della carrucola è trascurabile rispetto alle altre lunghezze in gioco. Il corpo e la carrucola possono muoversi solamente lungo la direzione verticale.

1. Trovare la posizione di equilibrio del corpo.
2. Calcolare la frequenza di oscillazione del corpo in verticale.
3. Il corpo si trova inizialmente nella posizione di equilibrio. Gli viene impressa una velocità v_0 lungo la verticale e diretta verso il basso. Qual'è il minimo valore di v_0 affinché il corpo urti il pavimento?

Problema 2 (15 punti)

Un punto materiale con velocità iniziale v_0 sale su un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale. Il moto è senza attrito.

1. Quale altezza raggiunge il punto?
2. Ora il piano, che ha massa m pari alla massa del punto materiale, viene lasciato libero di muoversi sul piano orizzontale. Quale altezza raggiunge ora il punto?

3. Stessa domanda, sapendo che sul piano c'è attrito dinamico con coefficiente di attrito μ_d .

Soluzione primo problema

Domanda 1

Indicando con y la posizione verticale della massa rispetto al suolo per l'inestensibilità del filo la carrucola deve trovarsi a

$$y_c = \frac{1}{2}\left(y + \frac{3}{4}h\right)$$

quindi la lunghezza della molla vale

$$\ell = h - y_c = h - \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}h$$

e la forza di richiamo

$$F_{el} = k\left(\ell - \frac{1}{4}h\right) = k\left(\frac{3}{8}h - \frac{1}{2}y\right)$$

La massa sarà in equilibrio quando $T = mg$, e la carrucola quando

$$F_{el} = 2T = 2mg$$

da cui

$$y_{eq} = \frac{3}{4}h - \frac{4mg}{k}$$

Domanda 2

Scriviamo l'equazione del moto per la massa:

$$m\ddot{y} = T - mg = \frac{F_{el}}{2} - mg = \frac{3}{8}kh - \frac{1}{2}ky - mg$$

da cui

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}}$$

Domanda 3

Dato che il moto consiste in una oscillazione armonica attorno alla posizione di equilibrio, avremo

$$y = y_{eq} + A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

Imponendo le condizioni al contorno abbiamo

$$
\begin{aligned}
y_{eq} &= y_{eq} + A \\
v_0 &= B\omega
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
y = y_{eq} + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t
$$

Per urtare il pavimento dovremo quindi avere

$$
v_0 = -\omega y_{eq} = -\sqrt{\frac{k}{2m}} \left(\frac{3}{4} h - \frac{4mg}{k} \right)
$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Usando la conservazione dell'energia abbiamo

$$
\frac{1}{2} m v_0^2 = mgh
$$

e quindi

$$
h = \frac{v_0^2}{2g}
$$

Domanda 2

Adesso si conserva sia l'energia E che la quantità di moto orizzontale P_x. Indicando con v_x e v_y le componenti della velocità del punto materiale rispetto al piano e con V la velocità (orizzontale) di quest'ultimo abbiamo

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} m \left[(V + v_x)^2 + v_y^2 \right] + mgy \\
P_x &= mV + m (V + v_x)
\end{aligned}
$$

Inizialmente

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} m v_0^2 \\
P_x &= m v_0 \cos \alpha
\end{aligned}
$$

e quando il punto materiale raggiunge la sua altezza massima ($v_x = v_y = 0$, $y = h$)

$$
\begin{aligned}
E &= mV^2 + mgh \\
P_x &= 2mV
\end{aligned}
$$

quindi

$$V = \frac{1}{2} v_0 \cos\alpha$$

e

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{4} m v_0^2 \cos^2\alpha + mgh$$

da cui

$$h = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \frac{1}{2}\cos^2\alpha\right) = \frac{v_0^2}{4g}\left(1 + \sin^2\alpha\right)$$

Domanda 3

Scriviamo le equazioni del moto del piano

$$m\ddot{X} = N\sin\alpha + \mu_d N\cos\alpha$$

e del punto materiale, queste ultime nella direzione normale

$$m\left(-\ddot{X}\sin\alpha\right) = N - mg\cos\alpha$$

e parallela al piano

$$m\left(a + \ddot{X}\cos\alpha\right) = -mg\sin\alpha - \mu_d N$$

Abbiamo indicato con a l'accelerazione del punto materiale relativa al piano, che è parallela ad esso. Risolvendo il sistema troviamo

$$a = -\frac{2g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)}{\mu_d\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha + 1}$$

e quindi il moto del punto materiale relativo al piano è uniformemente accelerato. Lo spazio percorso relativamente al piano che il punto materiale percorre prima di fermarsi (sempre relativamente ad esso) è

$$s = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2\left(\mu_d\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha + 1\right)}{4g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)}$$

che corrisponde ad una altezza

$$h = \frac{v_0^2}{4g}\frac{\mu_d\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha + 1}{\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha}\sin\alpha$$

Ponendo $\mu_d = 0$ si può ottenere la risposta alla domanda precedente come caso particolare

$$h = \frac{v_0^2}{4g}\left(1 + \sin^2\alpha\right)$$