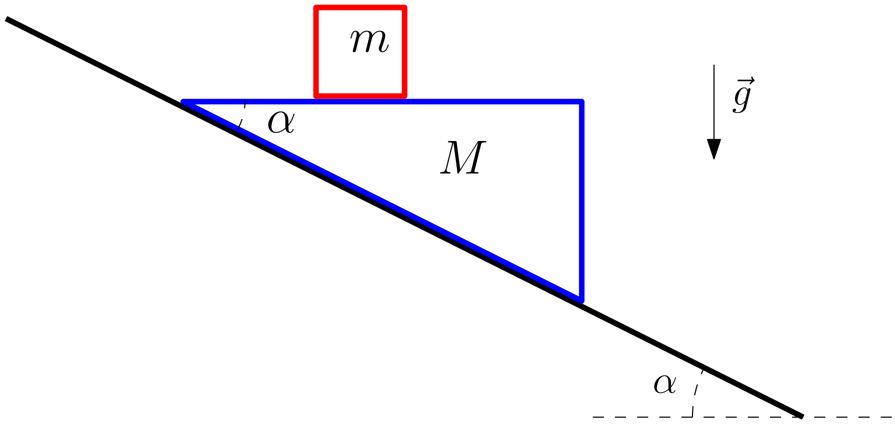
## 4.8. 20 novembre 2013

### Problema 1 (15 punti)

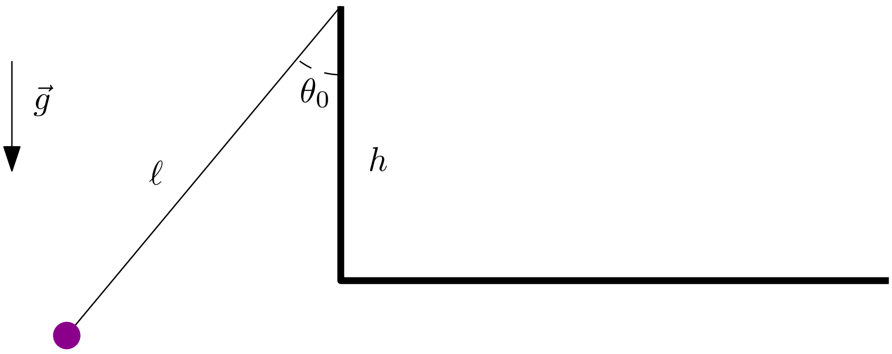



Un cuneo di massa $M$, con sezione triangolare retta, può scivolare senza attrito lungo un piano inclinato di un angolo $\alpha$ rispetto all'orizzontale, in modo che una faccia del cuneo resti sempre orizzontale.

Sulla faccia orizzontale del cuneo è appoggiato un corpo di massa $m$ soggetto ad una forza di attrito radente con coefficiente statico $\mu_s$ e coefficiente dinamico $\mu_d$.

1. Nell'ipotesi che il corpo non scivoli sulla superficie del cuneo, determinare la componente normale della reazione vincolare che il cuneo esercita sul corpo.
2. Determinare il massimo valore dell'angolo $\alpha$ oltre il quale il corpo inizia a scivolare.
3. Determinare infine l'accelerazione del corpo in assenza di attrito.

### Problema 2 (15 punti)




Un pendolo di lunghezza $\ell$ e massa $m$ è appeso ad una parete verticale come in figura. Ad una distanza $h = \ell/2$ al di sotto del punto di sospensione la parete diviene orizzontale. Il pendolo viene lasciato cadere da fermo da un angolo iniziale $\theta_0$. Il filo è privo di massa e gli attriti sono trascurabili.

1. Calcolare la velocità della massa quando il filo raggiunge la posizione verticale.
2. Per quale valore minimo dell'angolo $\theta_0$ la massa arriva a urtare il piano orizzontale?
3. Calcolare la tensione del filo immediatamente prima e immediatamente dopo l'istante nel quale il filo entra in contatto con la parete verticale. Sono uguali?

## Soluzione primo problema

### Prima domanda

Se il corpo non scivola sul cuneo, entrambi scivoleranno lungo il piano inclinato con accelerazione $a = g \sin \alpha$. L'equazione del moto per il corpo nella direzione verticale è quindi

$$m\left(-g\sin^2\alpha\right) = R - mg$$

dove $R$ è la reazione normale cercata, che quindi vale

$$R = mg\cos^2\alpha$$

### Seconda domanda

Scriviamo adesso l'equazione del moto per il corpo lungo la direzione orizzontale, nell'ipotesi che rimanga solidale al cuneo. Avremo

$$mg\sin\alpha\cos\alpha = F_a$$

dove $F_a$ è la forza di attrito. Ma d'altra parte

$$|F_a| \leq \mu_s R$$

e quindi deve essere

$$mg\sin\alpha\cos\alpha \leq \mu_s mg\left(1-\sin^2\alpha\right)$$

e quindi

$$\sin\alpha\cos\alpha \leq \mu_s\cos^2\alpha$$

cioè

$$\tan\alpha \leq \mu_s$$

### Terza domanda

In assenza di attrito il corpo può accelerare solo in verticale, dato che non ci sono forze orizzontali che agiscono su di esso. L'equazione del moto in tale direzione sarà

$$ma = R - mg \tag{4.8.1}$$

dove $R$ è la reazione normale, diversa da quella calcolata precedentemente. Il cuneo avrà la stessa accelerazione verticale, quindi

$$Ma = -R - Mg + N\cos\alpha \tag{4.8.2}$$

dove $N$ è la reazione normale del piano sul cuneo. D'altra parte il cuneo non accelera nella direzione perpendicolare al piano, per cui

$$0 = N - Mg\cos\alpha - R\cos\alpha$$

Ricavando $N$ e sostituendo nella (4.8.2) otteniamo

$$R = -Mg - \frac{Ma}{\sin^2\alpha}$$

ed infine sostituendo nella (4.8.1) otteniamo

$$a = -\frac{(M+m)\,g\sin^2\alpha}{M + m\sin^2\alpha} = -\frac{\tan^2\alpha}{\frac{M}{M+m} + \tan^2\alpha}g$$

## Soluzione secondo problema

### Prima domanda

Dalla conservazione dell'energia abbiamo

$$-mg\ell\cos\theta_0 = \frac{1}{2}mv^2 - mg\ell$$

e quindi

$$v = \sqrt{2gl\,(1-\cos\theta_0)}$$

### Seconda domanda

Dato che l'energia si conserva, il caso limite si ottiene quando la quota iniziale della massa è uguale a quella finale. Di conseguenza

$$\cos\theta_0 = \frac{h}{\ell} = \frac{1}{2}$$

e quindi

$$\theta_0 = \frac{\pi}{3}$$

### Terza domanda

Abbiamo già calcolato la velocità nella posizione verticale. Dato che immediatamente prima del contatto il moto della massa è circolare e di raggio $\ell$ l'equazione del moto radiale da

$$m\frac{v^2}{\ell} = T - mg$$

e quindi

$$T = mg + m\frac{v^2}{\ell} = mg\left(3 - 2\cos\theta_0\right)$$

Immediatamente dopo il contatto la velocità non è cambiata, ma il moto è circolare con raggio $\ell - h$. Di conseguenza

$$m\frac{v^2}{\ell - h} = T' - mg$$

e quindi la tensione è maggiore:

$$\begin{aligned} T' &= mg\left[1 + \frac{2\ell}{\ell - h}\left(1 - \cos\theta_0\right)\right] \\ &= mg\left(5 - 4\cos\theta_0\right) \end{aligned}$$