4.9. 17 dicembre 2014

Primo problema

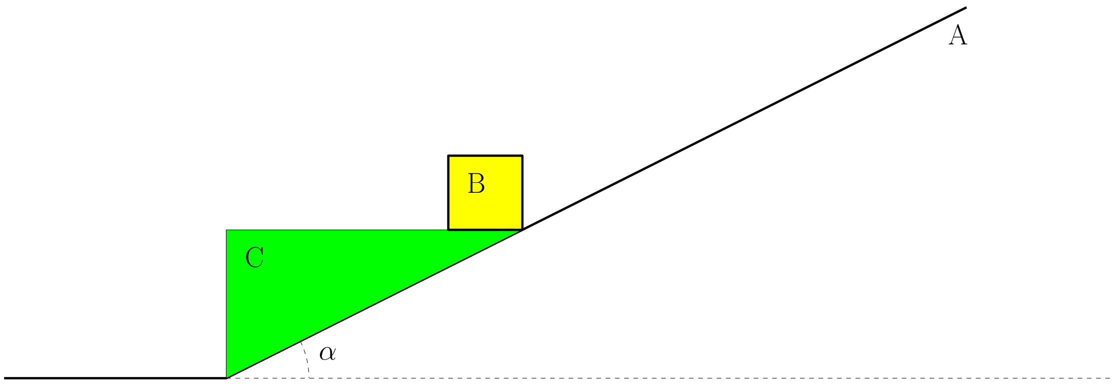

Figura 4.1.: Il piano inclinato A, con il cuneo C e il blocco B nella posizione iniziale.

Un blocchetto B di massa m è appoggiato sul piano orizzontale di un cuneo C di massa M, a sua volta giacente su un piano inclinato A (che è fisso in un sistema inerziale). B è libero di scivolare senza attrito sul cuneo C, mentre tra C e il piano A è presente un attrito radente con coefficiente statico μ_s e coefficiente dinamico $\mu_d < 1$. La lunghezza della faccia di C appoggiata sul piano inclinato è a. Il piano A è inclinato di un angolo α rispetto a quello orizzontale. Inizialmente il sistema $B + C$ è fermo (per esempio alla base del piano inclinato), con il blocchetto B situato all'estremità di C che poggia sul piano inclinato A. Con un colpo secco assestato *al cuneo*, il sistema si mette in moto con una velocità di C di modulo v_0 e verso in salita lungo il piano A, mentre B si muove di conseguenza. Nel seguito si assuma che il cuneo C e il blocco B non si stacchino l'uno dall'altro durante il colpo iniziale.

1. Determinare l'impulso (quantità di moto) complessivamente ricevuto dal sistema $B + C$ al momento del colpo iniziale, specificando l'angolo che esso forma con il piano orizzontale.

2. Nel caso in cui l'attrito sia assente ($\mu_s = \mu_d = 0$), determinare il massimo valore v_{max} di v_0 affinché B non cada fuori dal bordo del cuneo C e la massima altezza alla quale arriva il blocchetto B in funzione di v_0 per $v_{max} < v_0$.

3. Nel caso in cui l'attrito sia presente ($\mu_s > \mu_d > 0$), determinare la massima altezza alla quale arriva il blocchetto B in funzione di v_0 (nell'ipotesi $v_0 < v_{max}$); determinare inoltre il minimo valore di μ_s affinché, successivamente, il sistema $B + C$ non torni nella posizione iniziale.

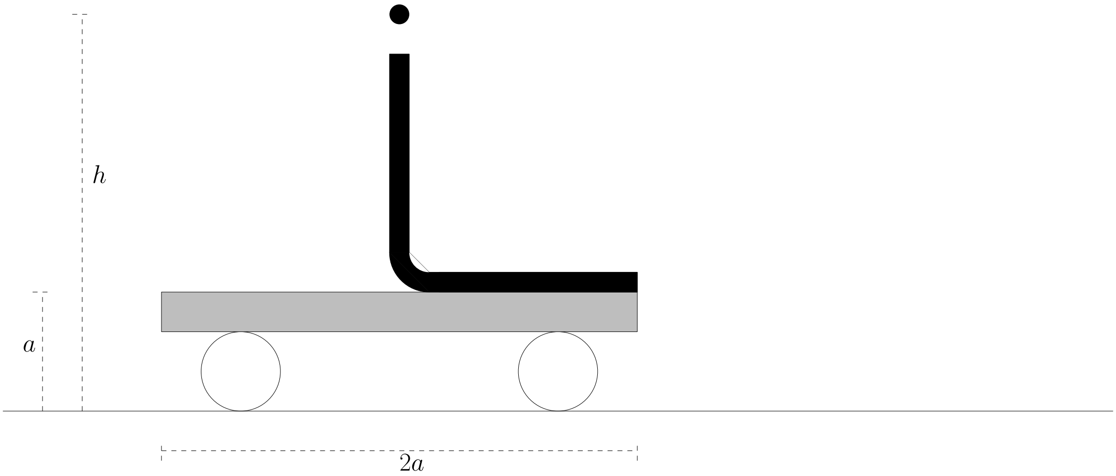

Figura 4.2.: Il carrello e la pallina nella posizione iniziale.

Secondo problema

Una pallina di massa m cade, da un'altezza h, un un tubo a "L", avente un opportuno racordo fra le sezioni verticale e orizzontale, dove può scivolare senza attrito. Il tubo è fissato ad un carrello di massa M, altezza da terra a e lunghezza $2a$. Le masse del tubo e delle ruote sono trascurabili rispetto a quella del carrello. La verticale del punto di caduta si trova a metà della lunghezza del carrello.

1. Nell'ipotesi che il carrello sia *bloccato* sul binario, determinare la distanza fra il punto nel quale la pallina tocca terra e la verticale di caduta.
2. Nell'ipotesi che il carrello sia *libero* di muoversi lungo il binario, determinare la velocità del carrello quando la pallina tocca terra e
3. la distanza tra il punto nel quale la pallina tocca terra e la verticale di caduta.

Soluzione primo problema

Prima domanda

Dopo il colpo il cuneo si muove parallelamente al piano inclinato con velocità

$$\vec{v}_C = v_0 \left(\cos\alpha \hat{e}_x + \sin\alpha \hat{e}_y\right)$$

Dato che nessuna forza orizzontale agisce sul blocco, questo si muove solo verticalmente, e dato che deve rimanere in contatto con il cuneo la sua velocità sarà

$$\vec{v}_B = v_0 \sin\alpha \hat{e}_y$$

Possiamo adesso scrivere la quantità di moto totale del sistema, che sarà uguale all'impulso complessivamente ricevuto:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= M\vec{v}_C + m\vec{v}_B \\ &= (M+m)\, v_0 \sin\alpha \hat{e}_y + M v_0 \cos\alpha \hat{e}_x\end{aligned}$$

L'angolo θ rispetto all'orizzontale sarà dato da

$$\tan\theta = \frac{P_y}{P_x} = \frac{M+m}{M}\tan\alpha$$

Seconda domanda

Trascurando le dimensioni del blocchetto, dato che questo non si muove in orizzontale cadrà dal cuneo se lo spostamento orizzontale di quest'ultimo sarà maggiore di $a\cos\alpha$. Il corrispondente spostamento verticale sarà

$$\Delta y = a\sin\alpha$$

Possiamo calcolare lo spostamento verticale massimo (per $v_0 \le v_{max}$) utilizzando la conservazione dell'energia. Immediatamente dopo il colpo abbiamo

$$E_i = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2\sin^2\alpha$$

e nel momento di massimo spostamento verticale

$$E_f = (M+m)g\Delta y$$

di conseguenza

$$\frac{1}{2}\left(M + m\sin^2\alpha\right)v_0^2 = (M+m)\,g\Delta y$$

e possiamo rispondere alla seconda parte della domanda risolvendo rispetto a Δy

$$\Delta y = \frac{v_0^2}{2g}\frac{M+m\sin^2\alpha}{M+m}$$

Ponendo adesso $v_0 = v_{max}$ e $\Delta y = a\sin\alpha$ otteniamo

$$\frac{1}{2}\left(M + m\sin^2\alpha\right)v_{max}^2 = (M+m)\,ga\sin\alpha$$

e quindi

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2(M+m)ga\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}}$$

Terza domanda

Scriviamo l'equazione del moto per il sistema $B+C$ nella direzione verticale. Detta A l'accelerazione del cuneo (parallela al piano) abbiamo

$$(M+m)\,A\sin\alpha = N\cos\alpha - \mu_d N\sin\alpha - (M+m)\,g$$

dove N è la reazione normale del piano, e per determinare il segno della forza di attrito si è considerata la situazione iniziale nella quale il cuneo sale. Scriviamo adesso l'equazione del moto per il solo cuneo nella direzione orizzontale, ottenendo

$$MA\cos\alpha = -N\sin\alpha - \mu_d N\cos\alpha$$

Da questa seconda equazione possiamo determinare N

$$N = -\frac{MA\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha}$$

e sostituendo nella prima troviamo

$$A = -\frac{(M+m)\,(\sin\alpha+\mu_d\cos\alpha)}{M+m\sin\alpha\,(\sin\alpha+\mu_d\cos\alpha)}g$$

Il cuneo compie quindi un moto uniformemente accelerato, e lo spostamento massimo sarà determinato da

$$\begin{aligned} s_{max} &= v_0 t + \frac{1}{2}At^2 \\ 0 &= v_0 + At \end{aligned}$$

e di conseguenza

$$s_{max} = -\frac{v_0^2}{2A}$$

e

$$\Delta y = -\frac{v_0^2}{2A}\sin\alpha$$

Verifichiamo questo risultato in alcuni casi particolari. In assenza di attrito

$$\begin{aligned} A &= -\frac{(M+m)\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}g \\ \Delta y &= \frac{v_0^2}{2g}\frac{M+m\sin^2\alpha}{M+m} \end{aligned}$$

in accordo con quanto visto precedentemente. Per un piano orizzontale ($\alpha = 0$)

$$\begin{aligned} A &= -\frac{(M+m)\,\mu_d}{M} g \\ \Delta y &= 0 \end{aligned}$$

e per un piano verticale ($\alpha = \pi/2$)

$$\begin{aligned} A &= -g \\ \Delta y &= \frac{v_0^2}{2g} \end{aligned}$$

Per non tornare al punto di partenza dopo essersi fermato il sistema $B+C$ si dovrà trovare in condizioni di equilibrio. Le equazioni del moto scritte precedentemente diventano adesso ($A = 0$)

$$0 = N\cos\alpha + F_a \sin\alpha - (M+m)\,g$$

e

$$0 = -N\sin\alpha + F_a\cos\alpha$$

dove F_a è la forza di attrito statico. Risolvendo per F_ae N troviamo

$$\begin{aligned} F_a &= (M+m)\,g\sin\alpha \\ N &= (M+m)\,g\cos\alpha \end{aligned}$$

ma deve essere

$$|F_a| \le \mu_s N$$

per cui

$$\mu_s \ge \tan\alpha$$

Soluzione secondo problema

Prima domanda

Usando la conservazione dell'energia possiamo calcolare la velocità della pallina all'uscita dal tubo:

$$v_0 = \sqrt{2g\,(h-a)}$$

Successivamente la pallina segue una traiettoria parabolica. Prendendo l'origine nell'intersezione tra il piano orizzontale d'appoggio e la verticale del punto di caduta si ha per la gittata d

$$\begin{aligned} d &= a + \sqrt{2g(h-a)}t \\ 0 &= a - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

ricavando il tempo di caduta dalla seconda equazione troviamo

$$y = \sqrt{\frac{2a}{g}}$$

e sostituendo nella prima

$$d = a + 2\sqrt{a(h-a)}$$

che si annulla come ci si aspetta per $a = 0$ e per $a = h$.

Seconda domanda

Possiamo ancora una volta usare la conservazione dell'energia, che si scrive in questo caso

$$mg\,(h-a) = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

dove abbiamo uguagliato l'energia iniziale a quella cinetica nel momento in cui la pallina esce dal tubo. Le velocità v e V sono quelle, rispettivamente, della pallina e del carrello.

Dato che

- si conserva la quantità di moto orizzontale
- la quantità di moto orizzontale è inizialmente nulla
- all'istante finale considerato tutte le velocità sono orizzontali

possiamo anche scrivere che

$$mv + MV = 0$$

e di conseguenza

$$v = -\frac{M}{m}V$$

Sostituendo nella espressione dell'energia cinetica troviamo

$$mg\,(h-a) = \frac{1}{2}M\left(1+\frac{M}{m}\right)V^2$$

e quindi, scegliendo opportunamente il segno,

$$V = -\sqrt{2g(h-a)\frac{m^2}{M\,(m+M)}}$$

Dato che dal momento del distacco la velocità del carrello non cambia, questa è la quantità cercata.

Terza domanda

Dalle equazioni ricavate nella domanda precedente troviamo subito la velocità (orizzontale) della pallina all'uscita dal tubo

$$v = -\frac{M}{m}V = \sqrt{2g(h-a)\frac{M}{(m+M)}}$$

Se in questo momento il carrello si è mosso all'indietro di $-\ell$, l'uscita avverrà (rispetto all'origine del sistema di riferimento scelta precedentemente) in $x = a - \ell$ e $y = a$. D'altra parte il centro di massa del sistema non si deve essere spostato in orizzontale e quindi

$$-M\ell + m\,(a-\ell) = 0$$

da cui

$$\ell = \frac{m}{m+M}a$$

Possiamo adesso determinare nuovamente d

$$\begin{aligned} d &= a - \ell + \sqrt{2g(h-a)\frac{M}{(m+M)}}t \\ 0 &= a - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} d &= a - \ell + 2\sqrt{a(h-a)\frac{M}{(m+M)}} \\ &= \frac{M}{m+M}a + 2\sqrt{\frac{M}{(m+M)}}\sqrt{a(h-a)} \end{aligned}$$